Тема: Неперервність функції. Похідна функції однієї змінної, її економічний зміст.

Мета: Повторити і систематизувати відомості про похідну.

План

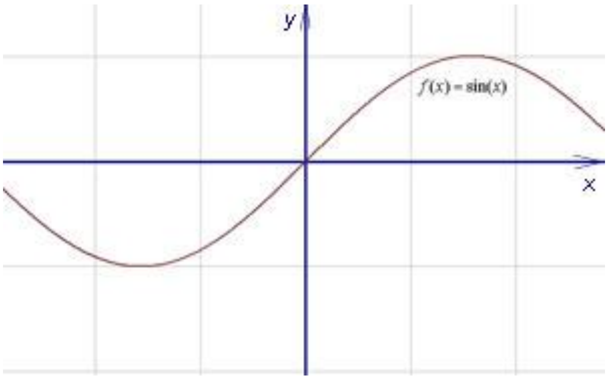
1. Неперервність функції.
2. Поняття похідної функції. Геометричний та фізичний зміст похідної.
3. Зв'язок між диференційованістю функції та її неперервністю.
4. Правила диференціювання.
5. Диференціювання складених функцій.

1. Неперервність функції

неперервність функції у точці

До поняття неперервної функції математика прийшла, вивчаючи в першу чергу різні закони руху. Простір і час нескінченні, і залежність, наприклад, шляху $\boldsymbol{s}$ від часу $\boldsymbol{t}$, виражена законом $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$, дає приклад неперервної функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$. Неперервно змінюється і температура води, що нагрівається, вона також є неперервною функцією від часу: $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$. Неперервна і лінія, якщо її можна накреслити, не відриваючи олівець від паперу. Ця лінія і є графіком неперервної функції.

Графічно функція неперервна в точці, якщо її графік не «розривається» в цій точці. Графік такої неперервної функції – показаний на рисунку нижче.



Означення (неперервності функції через границю): Функція є неперервною в точці x_0 при дотриманні трьох умов:

1. Функція визначена в точці x_0.
2. Існує границя функції в точці x_0, при цьому права і ліва границі рівні:

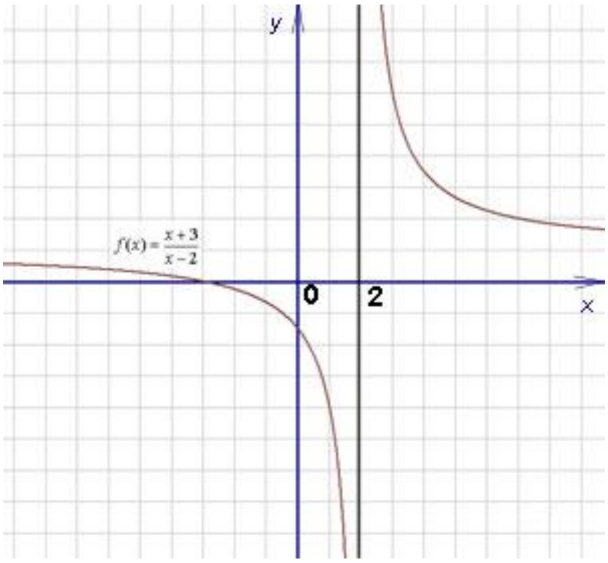
$$\lim_{x\to x_{0+0}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-0}} f(x) \qquad (3.1)$$

3. Границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, функція не є неперервною в точці. При цьому говорять, що функція має розрив, а точки на графіку, в яких графік переривається, називаються точками розриву функції.

Графік такої функції $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$, що має розрив в точці $x=2$ – на рисунку нижче.



Приклад.

Функція $f(x)$ визначена в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0\\ x, & \text{при } 0\le x<1\\ -x^2+4x-2, & \text{при } 1\le x<3\\ 4-x, & \text{при } x\ge 3\end{cases}$$

Чи буде ця функція неперервною в кожній з граничних точок її гілок, тобто в точках $x=0$, $x=1$, $x=3$?

Розв’язання:

Перевіряємо всі три умови неперервності функції в кожній граничній точці. Перша умова виконується, так як те, що функція визначена в кожній з граничних точок, випливає з визначення функції. Залишилося перевірити інші дві умови.

Точка $x=0$. Знайдемо лівобічну границю в цій точці: $\lim_{x\to 0-0} f(x)=f(0)=0$.

Знайдемо правобічну границю в цій точці: $\lim_{x\to 0+0} f(x)=f(0)=0$.

Границя функції і значення функції в точці $x=0$ повинні бути знайдені при тій гілці функції, яка включає в себе цю точку, тобто другої гілки. Знаходимо їх: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, $f(x)=0$.

Як бачимо, границя функції і значення функції в точці $x=0$ рівні. Отже, функція є неперервною в точці $x=0$.

Точка $x=1$. Знайдемо лівобічну границю в цій точці: $\lim_{x\to 1-0} f(x)=f(1)=1$.

Знайдемо правобічну границю в цій точці:

$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(-x^2+4x-2)=1$.

Границя функції і значення функції в точці $x=1$ повинні бути знайдені при тій гілці функції, яка включає в себе цю точку, тобто другої гілки. Знаходимо їх:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(-x^2+4x-2)=1;$$

$$f(1)=-1+4-2=1.$$

Границя функції і значення функції в точці $x=1$ рівні. Отже, функція є неперервною в точці $x=1$.

Аналогічне для точки $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}(-x^2+4x-2)=-9+12-2=1;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}(4-x)=4-3=1;$$

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(4 - x) = 1;$
$f(3) = 4 - 3 = 1.$

Границя функції і значення функції в точці $x = 3$ рівні. Отже, функція є неперервною в точці $x = 3$.

Таким чином, дана функція є неперервною в кожній граничній точці.

неперервність функції на проміжку

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в інтервалі (a, b) і неперервна в кожній точці цього інтервалу. Тоді вона називається *неперервної на інтервалі* (a, b). Аналогічно визначається поняття неперервності функції на проміжках виду $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$.

Нехай тепер функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$. Різниця між інтервалом і відрізком: граничні точки інтервалу не входять до інтервалу, а граничні точки відрізка входять в відрізок. Тут слід згадати про так звані односторонні неперервності: в точці a, залишаючись на відрізку $[a, b]$, ми можемо наближатися тільки справа, а до точки b – тільки зліва. Функція називається неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках цього відрізка, неперервна справа в точці a і неперервна зліва в точці b.

Прикладом неперервної функції може служити будь-яка з елементарних функцій. Кожна елементарна функція неперервна на будь-якому відрізку, на якому вона визначена. Наприклад, функції $y = x^2$ і $y = 2^x$ неперервні на будь-якому відрізку $[a, b]$, функція $y = \sqrt{x}$ неперервна на відрізку $[0, b]$, функція $y = \frac{x}{2-x}$ неперервна на будь-якому відрізку, що не містить точку $a = 2$.

основні властивості неперервних функцій

1. Якщо неперервна на інтервалі функція приймає на кінцях інтервалу значення різних знаків, то в певній точці цього відрізка вона приймає значення, рівне нулю. У більш формальному викладі ця властивість дана в теоремі, відомій як перша теорема Больцано-Коші.

2. Функція $f(x)$, неперервна на інтервалі $[a, b]$, приймає всі проміжні значення між значеннями в кінцевих точках, тобто, між $f(a)$ і $f(b)$. У більш формальному викладі ця властивість дана в теоремі, відомій як друга теорема Больцано-Коші.

3. Якщо функція неперервна на інтервалі, то на цьому інтервалі вона досягає свого найбільшого і свого найменшого значення, тобто якщо m – найменше, а M – найбільше значення функції на інтервалі $[a, b]$, то знайдуться на цьому відрізку такі точки x_1 і x_2, що $f(x) = m$ і $f(x) = M$. Теорема, в якій викладена ця властивість, називається другою теоремою Вейерштрасса.

точки розриву

Означення: Якщо функція не є неперервною в точці, то вона має в цій точці розрив, а сама точка називається точкою розриву.

Розриви бувають першого роду і другого роду.

Точка розриву першого роду: у функції існують як кінцева (тобто не рівна нескінченності) ліва границя, так і кінцева права границя, але функція не визначена в точці або ліва і права границі різні (нерівні).

точка усувного розриву першого роду

Ліва і права границі рівні. При цьому існує можливість довизначити функцію в точці. Довизначити функцію в точці, кажучи просто, забезпечити з'єднання точок, між якими знаходиться точка, в якій знайдені рівні один одному ліва і права границі. При цьому з'єднання повинно являти собою лише одну точку, в якій повинно бути знайдено значення функції.

Приклад.

Визначити точку розриву функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ та його вид.

Розв'язання:

Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не визначена в точці $x = 0$. Знайдемо ліву і праву границі функції в цій точці:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ліва і права границі рівні, отже точка - точка усувного розриву першого роду. Є можливість довизначити функцію: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0; \\ 1, \quad x = 0. \end{cases}$

точка неусувного (кінцевого) розриву першого роду

Існують ліва і права границя, але вони різні (нерівні). Функцію неможливо довизначити. Різниця границь називається стрибком.

Приклад. Визначити точку розриву функції та вид точки розриву для функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in (-\infty; 1]; \\ x + 1, & \text{якщо } x \in (1; +\infty). \end{cases}$

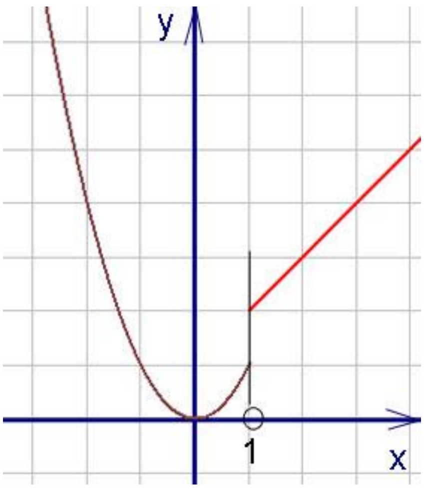
Розв'язання:

Очевидно, що в точці $x = 1$ змінюється вираз функції. Знайдемо ліву і праву границі функції в цій точці:

$$\lim_{x \to 1-0} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \to 1+0} x + 1 = 2.$$

Ліва і права границі не рівні , отже точка $x = 1$ – точка неусувного (кінцевого) розриву першого роду. Графік функції з точкою розриву - під прикладом.



точки розриву другого роду

Означення: точка, в якій хоча б одна з границь (ліва або права) - нескінченна (дорівнює нескінченності) називається точкою розриву другого роду.

Приклад.

Визначити точку розриву функції та вид точки розриву для функції $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

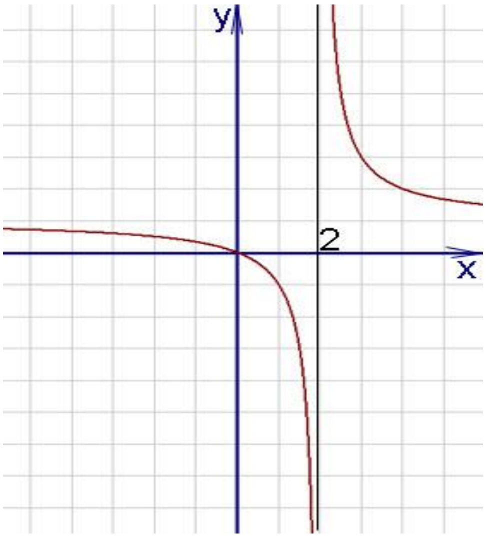
Розв'язання:

Очевидно, що в точці $x = 2$ функція невизначена. Знайдемо ліву і праву границі функції в цій точці:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{2-x} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x}{2-x} = +\infty.$$

Обидві границі нескінченні, тому точка $x = 2$ – точка розриву другого роду. Графік функції з точкою розриву - під прикладом.



2. Поняття похідної функції. Геометричний та фізичний зміст похідної

Нехай функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ визначена на деякому проміжку X і точка $\boldsymbol{x_0 \in X}$. Надамо аргументу функції приросту $\boldsymbol{\Delta x}$ ($\boldsymbol{\Delta x > 0}$, $\boldsymbol{\Delta x < 0}$) такого, щоб точка $\boldsymbol{x_0 + \Delta x \in X}$. Функція дістане при цьому приріст $\boldsymbol{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$.

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Означення: Відношення приросту функції до приросту аргументу називається *середньою швидкістю зміни функції*.

Це відношення показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

Означення: Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її *похідною* і позначається одним із символів:

$$f'(x_0)\ ,\ y'(x_0),\ \frac{dy}{dx}.$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (3.2).$$

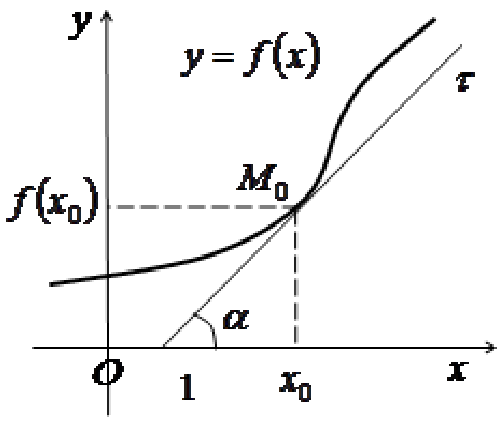
- якщо похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 існує, то функція називається *диференційованою в точці* x_0;

- якщо функція диференційована в кожній точці деякого проміжку X, то вона називається *диференційованою на проміжку* X;
- операція відшукання похідної називається *диференціюванням*.

геометричний та фізичний зміст похідної

геометричний зміст похідної

Похідна функції $y = f(x)$ *в точці* x_0 *дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка даної функції у точці* $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де α - кут, який утворює дотична τ з додатним напрямком осі Ox.



Приклад.

Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 3x - x^2$ у точці $x = 2$ і з'ясувати зміст одержаного результату.

Розв'язання:

Знайдемо приріст даної функції в точці $x = x_0$.

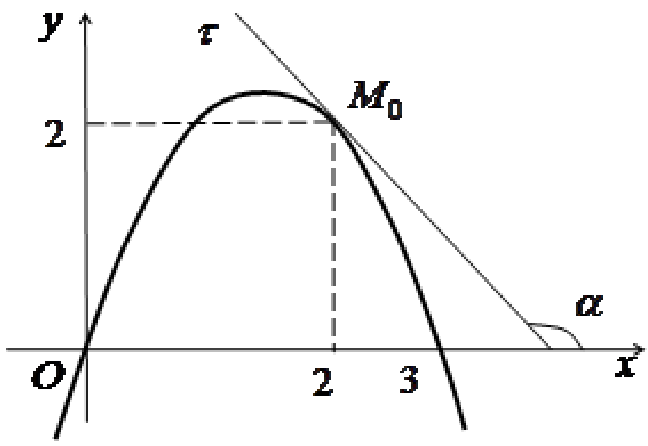
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)^2) - (3x_0 - x_0^2) = 3\Delta x - -2x_0\Delta x - (\Delta x)^2 = (3 - 2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2$.

Звідки $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3-2x_0)\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = 3 - 2x_0 - \Delta x$.

Отже $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3 - 2x_0 - \Delta x = 3 - 2x_0$.

Якщо $x_0 = 2$, то $f'(2) = 3 - 2 \cdot 2 = -1$. Це означає, що в даній точці функція спадає з такою ж самою швидкістю, з якою зростає аргумент.

З геометричної точки зору $f'(2) = \operatorname{tg}\alpha = -1$, звідки $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ - кут, який утворює дотична τ, проведена до параболи у точці $M_0(2; 2)$.



фізичний зміст похідної

Ньютон сформулював дві основні проблеми математичного аналізу:

1) довжина шляху, який долається, є постійною (тобто в будь-який момент часу); необхідно знайти швидкість руху у пропонований час;

2) швидкість руху постійно дана; необхідно знайти довжину пройденого у запропонований час шляху.

Для розв'язання таких задач використовують фізичний зміст похідної: *похідна від шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості руху матеріальної точки*.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$$

Приклад. Точка рухається прямолінійно за законом $S = t^4 - t^3 + 2t + 2$. Знайти швидкість руху вкінці першої та третьої секунд.

Розв'язок:

Закон швидкості руху знаходимо диференціюючи відстань

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 3t^2 + 2.$$

Для знаходження швидкості в певний момент часу підставляємо його значення. За умовами задачі отримаємо:

$v(1) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$ см/с

$v(3) = 4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 83$ см/с

Шукані значення рівні 3 см/с та 83 см/с.

Похідна функції показує, як змінюється її значення при малій зміні аргументу.

3. Зв'язок між диференційованістю функції та її неперервністю

Для існування границі (3.1) необхідно, щоб $\Delta y \to 0 (\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0)$. Тому функція повинна бути неперервною. Але не завжди існує границя (3.1) для неперервної функції. Ця умова не є достатньою а лише необхідною умовою диференційованості.

Приклад.

$f(x) = |x|$. Чи існує $f'(0)$?

Розв'язання:

Функція $y = |x|$ неперервна на всьому проміжку $(-\infty; +\infty)$, проте в точці $x = 0$ вона не має похідної. Дійсно:

якщо $\Delta x > 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$

якщо $\Delta x < 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$

Отже, в цій точці $x = 0$ функція $y = |x|$ не має похідної.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x = x_0$, то вона неперервна в цій точці.

Доведення:

Нехай існує $f'(x_0)$. За означенням похідної $\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists f(x_0)$. Також ми маємо:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

де α - нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тоді $\Delta y = (f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x) \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$. Отже, ми довели, що $y = f(x)$ неперервна у точці $x = x_0$ (за означенням).

4. Правила диференціювання

Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці x, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1. $(Cu)' = C(u)'$;
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Доведення:

Дійсно, розглянемо похідну суми даних функцій:

$$\big(u(x) + v(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u + v + \Delta v) - (u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$$

що і потрібно було довести.

Аналогічно доводиться правило 3 та 4.

Приклад.

Знайти похідну функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання:

За означенням функція $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ визначена при $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$. Знайдемо похідну частки за теоремою, використовуючи формули:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Отже, при $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ маємо $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Продовжуючи знаходити похідні базисних елементарних функцій з урахуванням означення похідної, її властивостей та правил диференціювання можна скласти наведену нижче таблицю.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$C' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

5. Диференціювання складених функцій

Теорема: Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці x, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці x, причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x),$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Це правило розповсюджується на ланцюжок з будь-якої кількості диференційованих функцій: *похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, з яких вона складається*.

Згідно даної теореми можна скласти таблицю похідних складених функцій, яка дозволяє швидше знаходити похідні.

Таблиця похідних складених функцій

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

$(\ln u)' = \frac{1 \cdot}{u} u'$

$(\log_a u)' = \frac{1 \cdot}{u \cdot \ln a} u'$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Питання для самоконтролю

1. Що називають похідною функції?
2. Яка функція називається диференційованою в точці; на проміжку?
3. Як називається операція знаходження похідної?
4. Чи завжди диференційована функція є неперервною?
5. Сформулюйте правила диференціювання функції.

Література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина І. М.: Наука, 1987.
2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина ІІ. М.: Наука, 1987.
3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.
5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.
6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.