Философия написана в той величественной книге, которая постоянно лежит открытой у нас перед глазами (я имею в виду Вселенную), но которую невозможно понять, если не научиться предварительно ее языку и не узнать те письмена, которыми она написана. Ее язык — это язык математики, и эти письмена суть треугольники и другие геометрические фигуры, без помощи которых невозможно понять в ней по-человечески хотя бы одно слово; без них мы можем только кружиться впустую по темному лабиринту.

Галилей

Г.А. Маковкин

Конспект лекций по теоретической механике

СТАТИКА

Рекомендуемая литература

- Диевский В.А. Теоретическая механика: Учебное пособие.—СПб.: «Лань», 2005.
- Лойцанский Л.Г., А.И. Лурье. Курс теоретической механики. Том первый. Статика и кинематика. 2006г.
- Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. О.Э. Кепе. – Спб.: Изд. «Лань», 2008.
- Маковкин Г.А., А.С. Аистов, С.Г. Юдников. Теоретическая механика. Методические указания для выполнения расчетно-графической работы по статике. 2006г.
-

Введение

ПРЕДМЕТ И РАЗДЕЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Теоретическая механика это наука о наиболее общих законах механического движения и механического взаимодействия.

Положения, сформулированные Т.М., служат основой для других важных разделов механики, таких, как

- сопротивление материалов,
- теория упругости,
- теория механизмов и машин,
- механика жидкостей и газов,
- небесная механика и других.

Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел (или изменение взаимного положения частей тела).

Движение рассматривается по отношению к некоторой **системе отсчета**, под которой понимается координатная система, связанная с определенным телом (обычно с Землей).

Частным случаем движения является относительное **состояние покоя.**

Материальные тела могут оказывать друг на друга **механическое действие**, при котором изменяется характер движения этих тел.

Мерой механического действия является **сила.**

В теоретической механике вместо реальных предметов и явлений рассматриваются **идеализированные объекты (модели).**

При построении этих моделей аспекты несущественные для решения задачи не принимаются во внимание.

Основными идеализированными объектами теоретической механики являются материальная точка, механическая система и абсолютно твердое тело.

- **Материальная точка** — это точка, обладающая массой. Материальной точкой можно считать любое материальное тело, если его размерами в данной конкретной задаче можно пренебречь.
- **Механической системой** называется любая совокупность материальных точек.
- **Материальное тело** может рассматриваться как механическая система,

образованная непрерывной совокупностью материальных точек.

- **Абсолютно твердым телом** называется такое материальное тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным.

  В теоретической механике все тела рассматриваются как абсолютно твердые. В дальнейшем для краткости будем называть их просто **твердыми телами**.

Твердое тело называется **свободным**, если его перемещение ничем не ограничивается. В противном случае тело называется **несвободным**.

Ограничения, наложенные на перемещения тела, называются **связями.**

Курс теоретической механики традиционно делится на три крупных раздела: статику, кинематику и динамику.

- **Статика** (от греч. statos — неподвижный) — это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия механических систем под действием сил. Кроме этого в статике рассматривают также законы, по которым системы сил могут преобразовываться.
- **Кинематика** (от греч. kinema — движение) — раздел механики, в котором изучается движение материальных тел без учета определяющих его сил и масс, т. е. как движение чисто геометрических объектов.
- **Динамика** (от греч. dinamis — сила) — это раздел механики, в котором изучаются движения механических систем под действием сил. Динамика является синтезом статики и кинематики.

Тема 1.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

1.1 СИЛЫ И СИСТЕМЫ СИЛ

В общем случае твердое тело может находиться или в состоянии покоя, или в состоянии какого-то движения. Бесчисленные разновидности состояний движения мы будем называть **кинематическими состояниями.**

Основная цель статики — определение условий, при выполнении которых механическая система (например, тело) будет находиться в состоянии покоя.

Изменение характера движения означает изменение кинематического состояния (например, нарушение состояния покоя).

Изменение кинематического состояния происходит под действием сил.

Сила – является мерой механического действия и определяется следующими элементами:

- точкой приложения,
- направлением,
- численным значением (модулем).

Важной характеристикой является **линия действия силы**.

Единицей модуля силы является **ньютон**, хотя на практике используется иногда и другая единица — килограмм силы: 1 кгс = 9,81 Н.

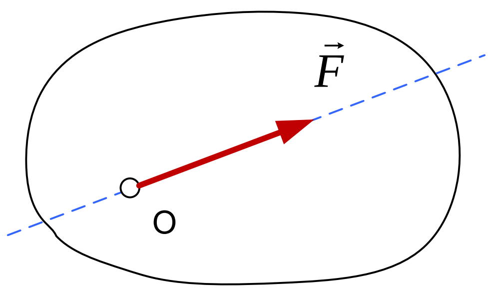


Рис. 1.1

Сила является векторной величиной (рис. 1.1). Такие величины мы будем обозначать с чертой или стрелочкой сверху: $\vec{F}$ *или* $\bar{F}$.

Условимся, что если черта или стрелка сверху отсутствует, то это означает **модуль данного вектора**: $F = \left|\vec{F}\right|$.

Совокупность нескольких сил $(\vec{F}_1,\ \vec{F}_2, \dots ,\ \vec{F}_n)$ называется **<u>системой сил.</u>**

Если одну систему сил, действующую на свободное твердое тело, можно заменить другой системой сил так, что при этом кинематическое состояния тела не изменится, то эти системы сил называют **<u>эквивалентными</u>** друг другу.

> **Для обозначения эквивалентности систем сил используются символ ∞ или символ $\equiv$.**

Одна сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется ее **<u>равнодействующей</u>**. Будем обозначать ее символом $\vec{R}$.

> **Заметим, что не всякая система сил имеет равнодействующую.**

Система сил, не выводящая из равновесия свободное твердое тело, называется **<u>уравновешенной системой</u>**, или эквивалентной нулю.

Основная задача статики состоит в установлении условий, которым должны удовлетворять системы сил, чтобы они были уравновешенными.

> ***Под действием уравновешенной системы сил свободное твердое тело не обязательно находится в покое.***
>
> ***Если до приложения этой системы сил тело двигалось, то оно и будет продолжать свое движение.***
>
> ***Чтобы под действием уравновешенной системы сил тело находилось в состоянии покоя необходимо, чтобы оно изначально покоилось и до приложения этой системы сил.***

Все силы, действующие на точки механической системы (и твердого тела), делятся на внешние силы и внутренние силы.

<u>Внешними силами</u> называются силы, с которыми на точки механической системы действуют какие-либо тела, не входящие в систему.

<u>Внутренними силами</u> называются силы взаимодействия точек самой системы.

> **Деление сил на внешние и внутренние условно, оно зависит от того, какие именно тела мы включаем в рассматриваемую механическую систему.**
>
> **Например, если рассмотреть подъемный кран и висящий на его тросе груз как одну механическую систему, то сила натяжения троса будет силой внутренней.**
>
> **Если же рассматривать механическую систему, состоящую только из груза, то сила натяжения троса будет является силой внешней.**

Перейдем теперь к изложению аксиом статики — положений, справедливость которых подтверждена практикой человеческой деятельности.

1.2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Аксиома 1. Аксиома двух сил

Система из двух сил является уравновешенной тогда и только тогда, когда эти силы:

1) имеют общую линию действия,

2) направлены по ней в противоположные стороны,

3) равны по модулю.

Возможных вариантов этого расположения сил всего два, они показаны на рис. 1.2. В обоих случаях имеем: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, но при этом $F_2 = F_1$.

Из данной аксиомы сразу следует, что система из одной силы никогда не может быть уравновешенной.

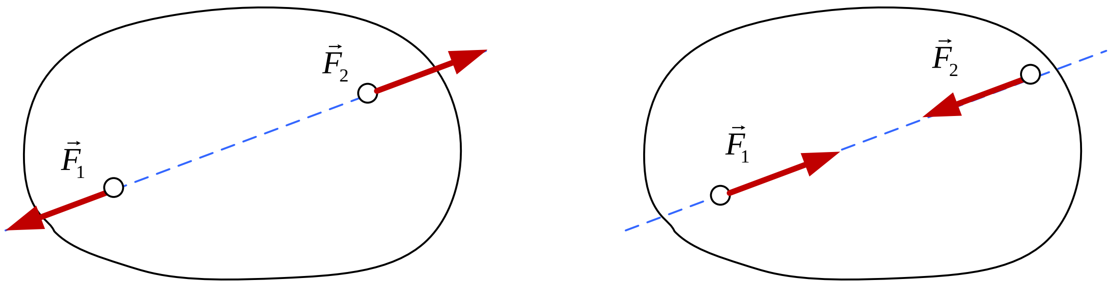


Рис. 1.2

Следствие:

Если для некоторой системы сил существует эквивалентная ей равнодействующая $\vec{R}$, то данная система сил может быть уравновешена одной силой, которая называется **уравновешивающей силой**.

Аксиома 2. Аксиома эквивалентности систем сил

Две системы сил, отличающиеся друг от друга на уравновешенную систему сил, эквивалентны.

Это значит, что к любой системе сил можно добавить или из нее исключить уравновешенную систему сил.

Действие системы сил на тело при этом не изменится.

Следствие из аксиом 1 и 2

Силу можно переносить вдоль линии действия в другую точку данного тела.

Действительно, если на тело действует некоторая сила $\vec{F}$, приложенная в точке A (рис. 1.3), то мы можем

- в произвольной точке B на линии действия силы добавить уравновешенную систему из силы $\vec{F}' = \vec{F}$ и силы $\vec{F}'' = -\vec{F}$.
- исключить из полученной системы трех сил уравновешенную систему сил, состоящую из сил $\vec{F}$ и $\vec{F}''$.

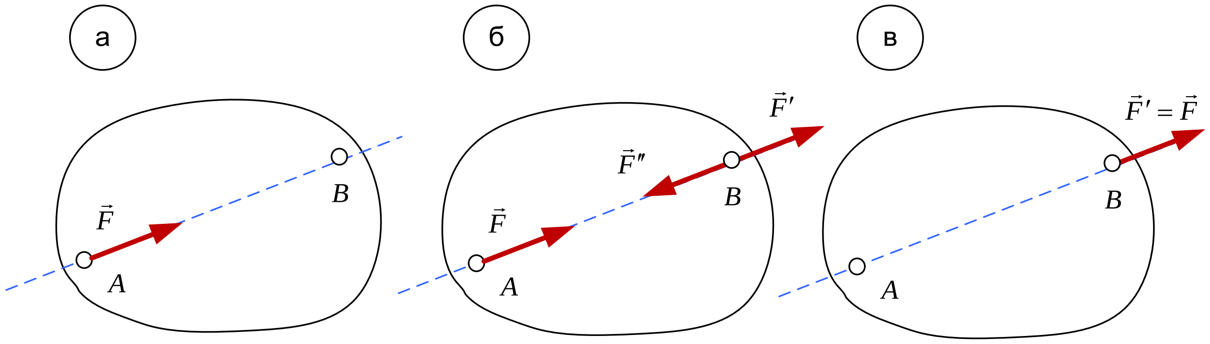


Рис.1.3

Останется одна сила $\vec{F}' = \vec{F}$, которая эквивалентна силе $\vec{F}$.

Эта аксиома справедлива при рассмотрении абсолютно твердых тел. В этом случае сила может рассматриваться как **скользящий вектор**,

Скользящий вектор не связан с конкретной точкой приложения на линии ее действия.

Силу нельзя считать скользящим вектором, рассматривая ее действие на деформируемые тела, то есть при изучении таких дисциплин как **сопротивление материалов** и **строительная механика**.

Аксиома 3. Аксиома параллелограмма сил

Система из двух сил, приложенных в одной точке, имеет равнодействующую, равную их векторной сумме, и приложенную в той же точке.

Геометрически сумма двух сил $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис. 1.4) изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на его сторонах (исключение — случай $\vec{R} = 0$ — уравновешенная система сил).

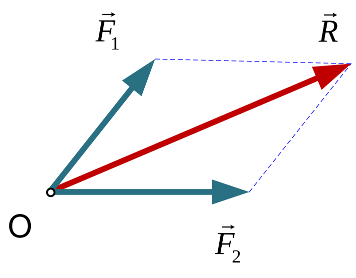


Рис. 1.4

Следствие:

Любую силу можно разложить на две непараллельные силы, приложенные в той же точке, что и исходная сила. Это можно сделать бесконечным количеством способов.

Сумму двух векторов можно найти, построив вместо параллелограмма сил треугольник сил. Треугольник сил строится от произвольной точки плоскости путем присоединения начала второго вектора к концу первого вектора.

В силу равенства противоположных сторон параллелограмма замыкающий вектор геометрически будет равен искомому вектору $\vec{R}$, причем получаемый результат не зависит от порядка следования слагаемых: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$.

Суммарный вектор будет являться равнодействующей двух сил (будет эквивалентен им), если приложить его в точке, где приложены обе силы.

Силовые треугольники

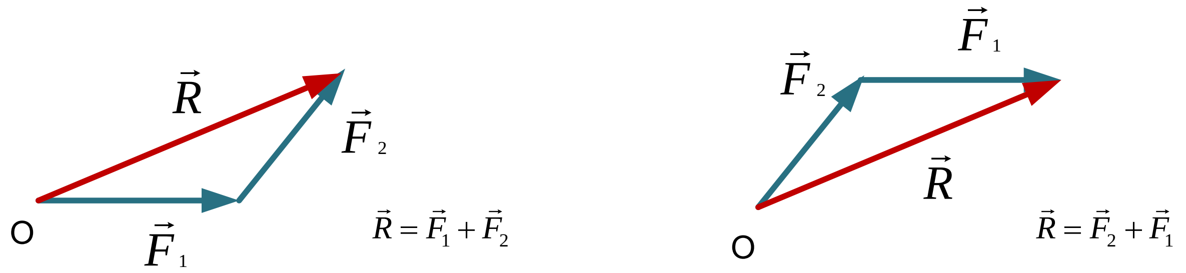


Рис. 1.5

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить аналитически, используя формулы тригонометрии для треугольников.

Таким образом, если линии действия двух сил пересекаются, то эти силы имеют равнодействующую. Если же линии действия сил не пересекаются, то эти силы могут не иметь равнодействующей.

Аксиома 4. Аксиома двух тел

Принцип равенства действия и противодействия:

При всяком действии одного тела на другое силы их взаимодействия:

1) **имеют общую линию действия,**
2) **направлены по ней в противоположные стороны и**
3) **равны по модулю.**

Приведенная формулировка говорит о том, что силы никогда не возникают поодиночке. Действие всегда порождает противодействие.

При этом (рис. 1.6): $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ и $F_2 = F_1$.

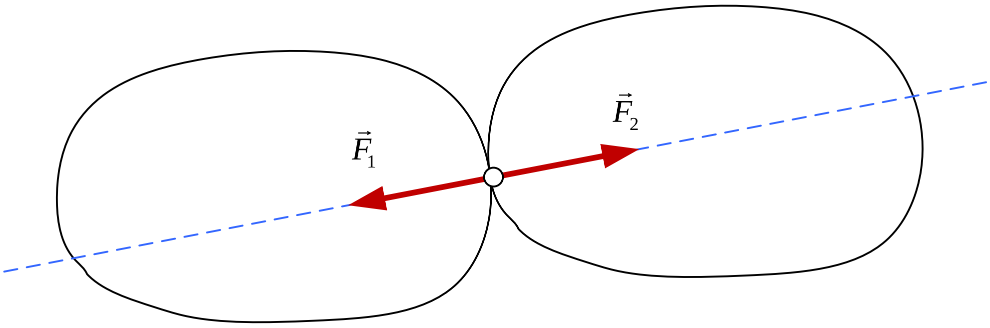


Рис. 1.6

Сравнивая аксиому 4 с аксиомой 1, можно увидеть, что формально силы действия и противодействия образуют уравновешенную систему сил.

Однако надо учитывать, что эти силы приложены к разным телам.

На основании рассмотренного принципа можно сделать важное заключение.

Свойство внутренних сил

Векторная сумма внутренних сил любой механической системы всегда равна нулю.

Действительно, для каждой внутренней силы в системе имеется и сила противодействия, а их векторная сумма равна нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (см. рис. 1.6).

Приведенное свойство имеет большое значение, поскольку позволяет при составлении уравнений статики исключать из рассмотрения неизвестные внутренние силы.

Аксиома 5. Принцип отвердевания

Равновесие изменяемого (деформируемого) тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.

Простым примером может служить случай замерзания некоторого объема жидкости или застывания бетонной смеси.

Приведенный принцип позволяет при составлении уравнений статики для деформируемого тела, находящегося в равновесии, считать его абсолютно твердым. Таким образом, статика абсолютно твердого тела является необходимой составной частью механики деформируемого тела (сопротивления материалов, теории упругости, гидромеханики и других).

Тема 2.

СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

2.1. ПОНЯТИЕ О СВЯЗЯХ.

Материальные тела при взаимодействии ограничивают перемещения друг друга, что сказывается на характере их возможного движения.

Например, если на столе лежит книга, то поверхность стола ограничивает перемещения книги, делая невозможным ее опускание ниже этой поверхности. Также имеются ограничения у положений груза, висящего на тросе: он не может удалиться от точки подвеса на расстояние большее, чем длина троса.

Ограничения, наложенные на положения (скорости) точек механической системы, называются **связями**.

Связи всегда осуществляются какими-либо материальными телами.

Так, для лежащей на столе книги связь осуществляет поверхность стола; для груза, висящего на тросе, — сам трос.

Реакцией связи называется сила, с которой на данное тело действует то тело, которое осуществляет связь.

Так, для книги, лежащей на столе, реакцией связи будет сила, с которой поверхность стола действует на книгу.

Для груза, висящего на тросе, реакцией связи является сила, с которой трос действует на груз (сила натяжения троса).

Силы, не являющиеся реакциями связей, принято называть **активными (или заданными).**

Таким образом, мы имеем теперь две классификации сил.

Все силы, действующие на механическую систему, делятся на:

- **внешние и внутренние,**
- **активные и реакции связей.**

Обе эти классификации будут использоваться при дальнейшем изложении теоретической механики.

Определение реакций, наложенных на механическую систему связей при ее равновесии, составляет содержание большинства решаемых в статике задач. Большое практическое значение имеют расчеты сил, действующих на фундаменты, опоры, подвески, расчеты сил натяжения тросов, канатов и прочее.

Изучение равновесия несвободных тел основано на следующем принципе:

Принцип освобождаемости от связей

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи, учтя их действие введением соответствующих реакций связей.

Пример

Для шара, лежащего на горизонтальной плоскости стола (рис. 2.1), мысленно отбрасывая связь (стол), мы должны ввести силу с которой стол воздействует на шар, то есть реакцию связи $-$ силу $\vec{N}$.

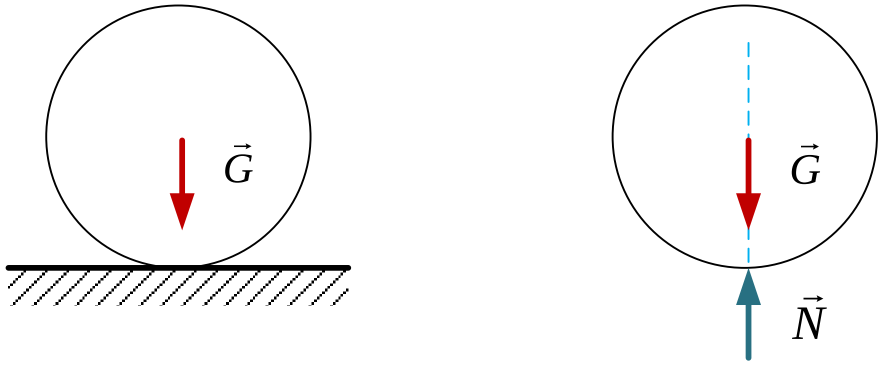


Рис. 2.1

Поскольку шар находится в равновесии, то действующая на него система из двух сил (силы тяжести $\vec{G}$ и реакции $\vec{N}$) является уравновешенной. Тогда, согласно аксиоме 1, эти силы направлены по одной прямой, противоположно друг другу и равны по модулю: $N = G$.

Отметим, что реакция всегда направлена в сторону, противоположную той, куда тело, осуществляющее связь, не дает перемещаться данному телу.

Решение задач статики значительно упрощается, если заранее известны направления реакций связей.

Поэтому рассмотрим сейчас ряд связей, когда направления реакций полностью или частично известны.

2.2. РЕАКЦИИ НЕКОТОРЫХ СВЯЗЕЙ

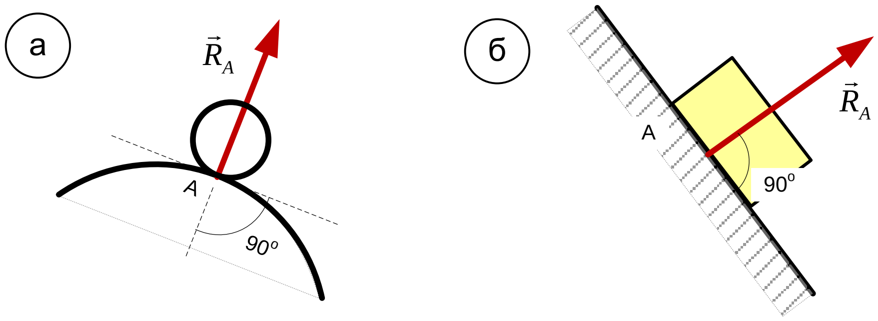
1. Гладкая поверхность

Гладкая поверхность, т. е. поверхность без трения, позволяет взаимодействующему с ней телу свободно перемещаться по касательной плоскости в точке касания (рис. 2.1, а) и не позволяет перемещаться в направлении нормали к этой плоскости.

Следовательно, реакция такой поверхности (сила $\vec{R}_A$) направлена по общей нормали; она называется при этом **нормальной реакцией.**

В частном случае, когда поверхность является плоскостью, реакция направлена перпендикулярно этой плоскости (рис. 2.2, б).

При опирании углом или на угол реакция направлена по нормали к той поверхности, которая соприкасается с углом (рис. 2.2, в и 2.2,



г).

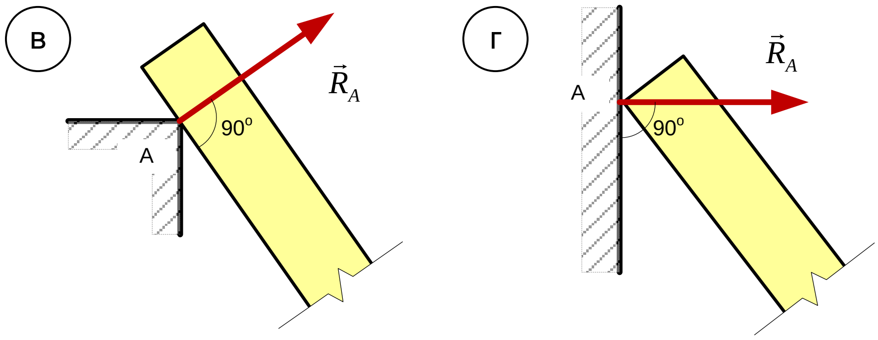


Рис. 2.2

Важно понимать, что направление линии действия реакции не зависит от действующих на тело сил.

Опирание на поверхность вызывает реакцию только при надавливании.

Эта связь называется **односторонней или неудерживающей связью**.

Теперь рассмотрим техническое устройство, называемое **«шарнир»**.

Шарниры бывают двух типов: цилиндрические и сферические.

а) Цилиндрической шарнир (рис. 2.3, а).

Цилиндрический шарнир допускает поворот внутренней части относительно внешней. Поворот происходит относительно оси цилиндра. Силы взаимодействия проходят перпендикулярно касательной плоскости, проведенной через линию соприкосновения. Линия их действия всегда проходит через ось шарнира.

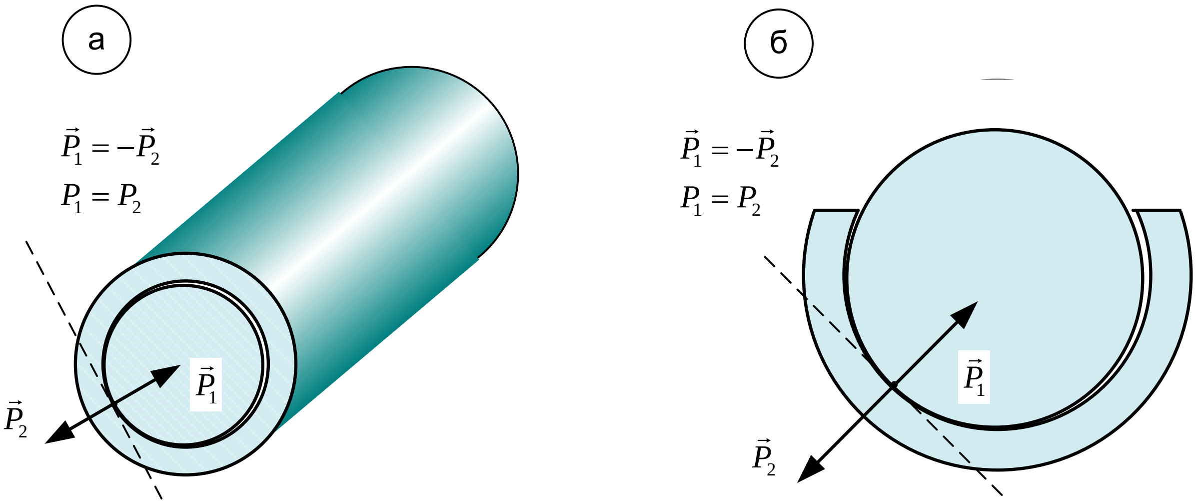


Рис. 2.3

b) Сферический шарнир (рис. 2.2, б).

Сферический шарнир допускает поворот внутренней части относительно внешней в любом направлении. Поворот происходит относительно центра шарнира. Силы взаимодействия перпендикулярны касательной плоскости, проведенной через точку соприкосновения. Линия их действия всегда проходят через центр шарнира.

2. Нить

Под термином «нить» в теоретической механике понимают любой гибкий элемент: трос, канат, веревку и т. п. Реакция нити всегда направлена вдоль нити и всегда внутрь ее (возникает только при натягивании нити).

Эта связь также является односторонней.

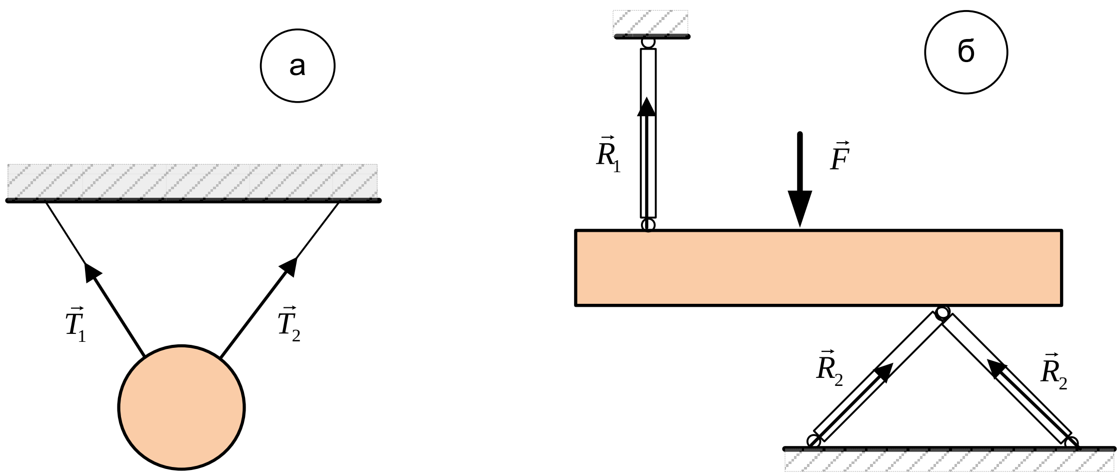


Рис. 2.4

На рис. 2.4, а силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ являются реакциями.

3. Опорный стержень.

Опорным стержнем принято называть невесомый стержень, прикрепляемый с двух сторон с помощью шаровых шарниров, которые допускают свободный поворот тел вокруг центра (или оси) этого шарнира (рис. 2.4, б).

На такой стержень действуют только две силы на его концах, и тогда, согласно аксиоме 1, эти силы имеют общую линию действия, которая проходит через центры опорных шарниров.

В случае прямолинейного стержня реакция направлена по оси стержня.

Эта связь является **удерживающей** или **двухсторонней**.

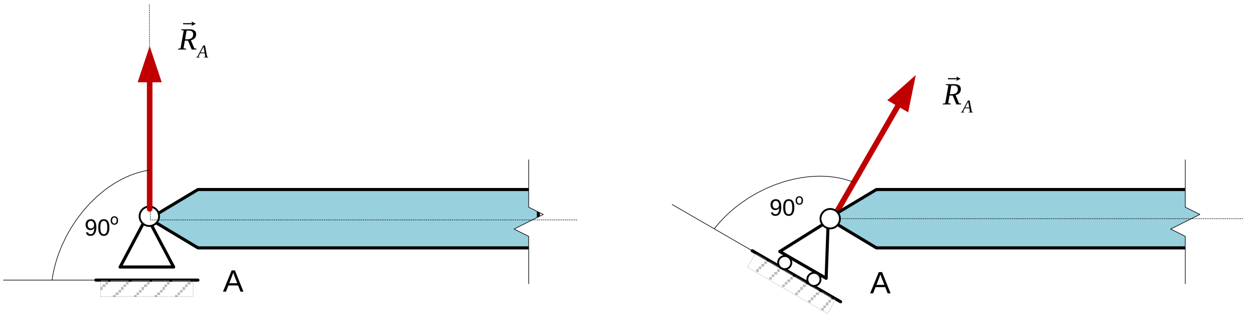


Рис. 2.5

4. Шарнирно-подвижная (скользящая) опора.

Такой тип опоры обычно реализуется в виде опоры на катках (рис. 2.5).

Наличие катков позволяет опоре свободно перемещаться вдоль поверхности, поэтому, как и в случае взаимодействия тела с гладкой поверхностью, реакция имеет известное направление — она перпендикулярна опорной поверхности.

5. Шарнирно-неподвижная опора.

Если тело прикреплено к поверхности (другому телу) с помощью неподвижного цилиндрического шарнира (см. рис. 2.6, а), то реакция имеет неизвестное направление в плоскости действия и угол α может быть любым.

В этом случае силу $\vec{R}_A$ неизвестного направления удобно разложить на две неизвестные силы $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, направленные по координатным осям.

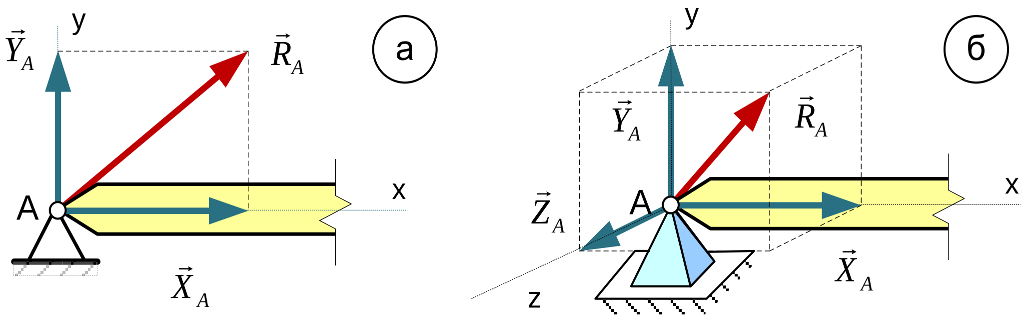


Рис. 2.6

При этом $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$

и $R_A = \sqrt{X_A^{\ 2} + Y_A^{\ 2}}$

Силы $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ называются составляющими силы $\vec{R}_A$ по осям x и y.

6. Шаровая шарнирно-неподвижная опора.

Для шарового (сферического) шарнира реакция может иметь любое направление в пространстве.

В этом случае ее следует разложить на три составляющие по осям: X_A, Y_A и Z_A (рис. 2.6, б).

При этом $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$

и $R_A = \sqrt{X_A^{\ 2} + Y_A^{\ 2} + Z_A^{\ 2}}$

7. Жесткая заделка

Движение тела может быть ограничено **жёсткой заделкой** в какой-либо опоре (рис. 2.7).

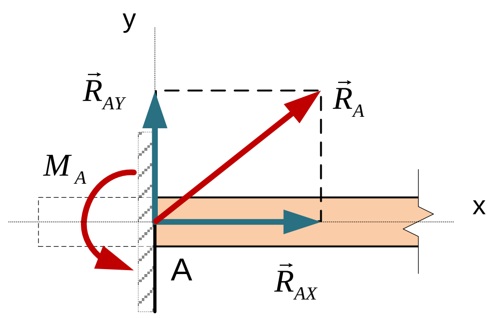


Рис. 2.7

Жёсткая заделка препятствует любому поступательному перемещению тела, поэтому направление её реакции заранее определить нельзя и сначала определяют её составляющие $\vec{R}_{AX}$ и $\vec{R}_{AY}$.

Кроме того, жёсткая заделка препятствует повороту телу, поэтому, кроме силовой реакции, на тело действует ещё момент заделки M_A , уравновешивающий стремление нагрузок повернуть тело в заделке.

Подробное рассмотрение моментов и их свойств отложим до изучения темы №6.

2.3. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ, ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Движение материальных тел и точек в пространстве можно представить в виде комбинации более простых (элементарных) форм движения, таких как движение вдоль прямолинейной оси или поворот относительно некоторой оси.

Возможность совершения телом одного из таких элементарных движений назовем **степенью свободы**.

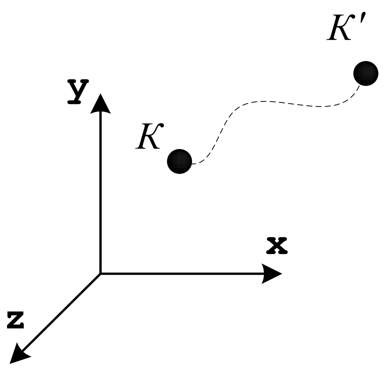
Количество элементарных форм движения, в виде комбинации которых может быть представлено движение тела, назовем **числом степеней свободы**.

Материальная точка

Движение свободной материальной точки в пространстве может быть представлено в виде комбинации трех элементарных видов движения, а на плоскости, -- только двух.

В пространстве

3 степени свободы



На плоскости

2 степени свободы

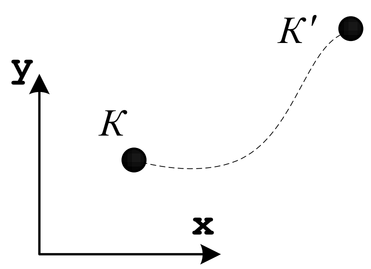


Рис. 2.8

Материальное тело

Свободное материальное тело, двигаясь в пространстве или на плоскости, не только смещается по направлению координатных осей, но может также и поворачиваться.

В пространстве	На плоскости
6 степеней свободы	3 степени свободы

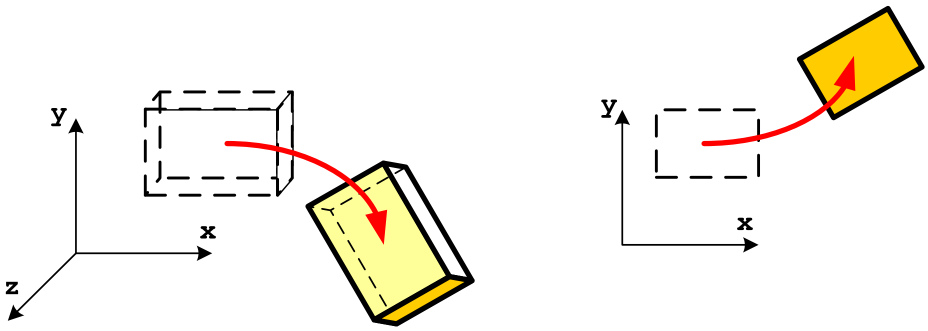


Рис. 2.9

Чтобы конструкция, находясь под действием внешних сил находилась в покое, конструкции опор и их количество должны быть подобраны таким образом, чтобы исключить все степени свободы тела.

2.4. РАЗНОВИДНОСТИ ОПОР И ИХ СХЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ

Схематическое изображение конструкции, отражающее основные, наиболее важные особенности ее поведения, называется **расчетной схемой.**

Любая конструкция имеет опоры, фиксирующие ее положение как жесткого целого. Направление и количество реакций, возникающих со стороны опоры конструкции, зависит от ее устройства.

Опоры конструкции на расчетных схемах показываются с помощью условных обозначений.

Часто характер работы опоры показывается с помощью схемы, составленной из опорных стержней (см. §2.2), которые запрещают те же степени свободы, что и сама опора.

Опорный стержень, который далее будем называть просто «связь», обладает следующим свойством – он запрещает перемещение точки тела в направлении свой оси (вдоль линии, соединяющей центры шарниров).

По этой же линии направлена и возникающая реакция (см. рис. 2.10).

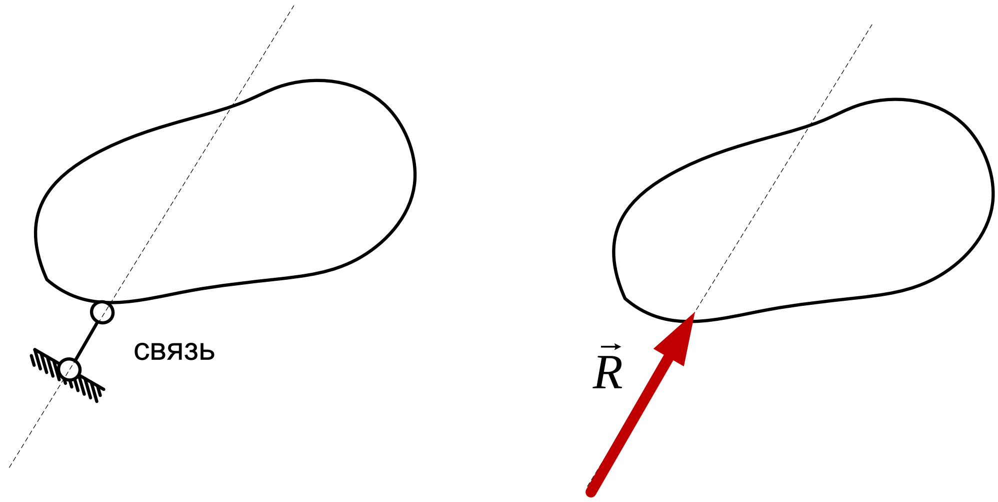
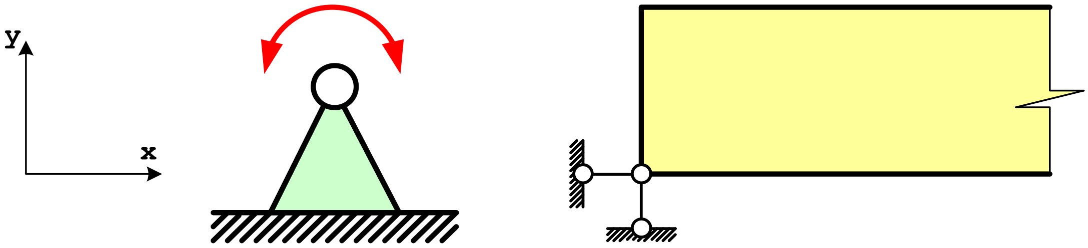


Рис. 2.10

Опоры, используемые в плоских расчетных схемах

1. **Шарнирно-неподвижная опора.**

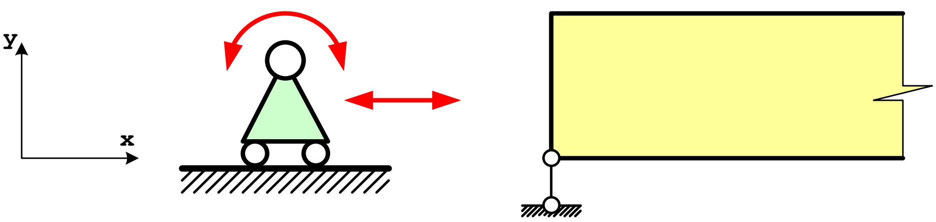
   Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



2 связи + 1 степень свободы = 3 степени свободы свободного тела

2. **Шарнирно-подвижная опора.**

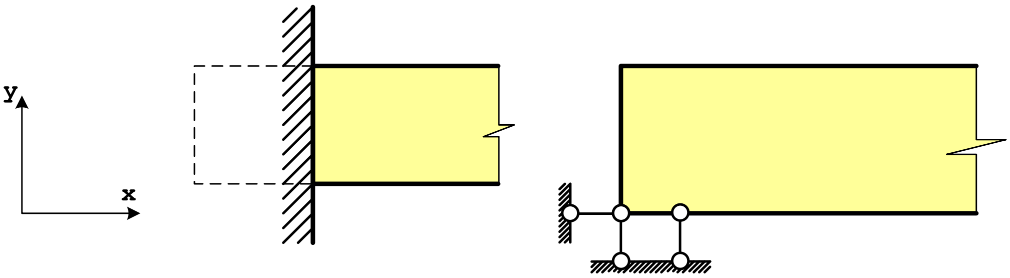
   Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



1 связь + 2 степени свободы = 3 степени свободы свободного тела

3. Жесткая заделка.

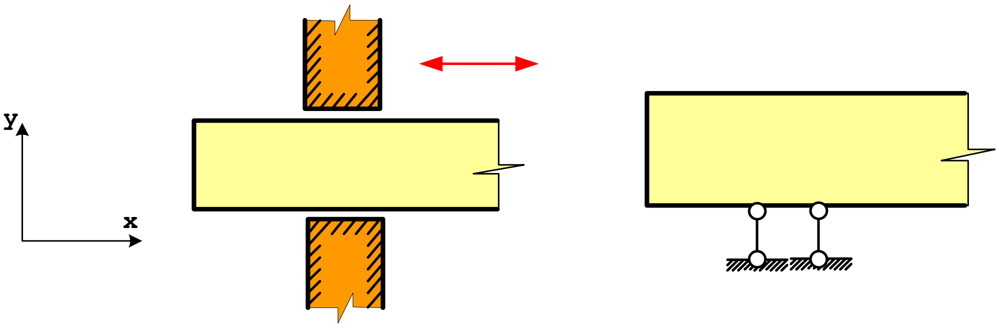
Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



3 связи + 0 степеней свободы = 3 степени свободы свободного тела

4. Скользящая заделка.

Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



2 связи + 1 степени свободы = 3 степени свободы свободного тела

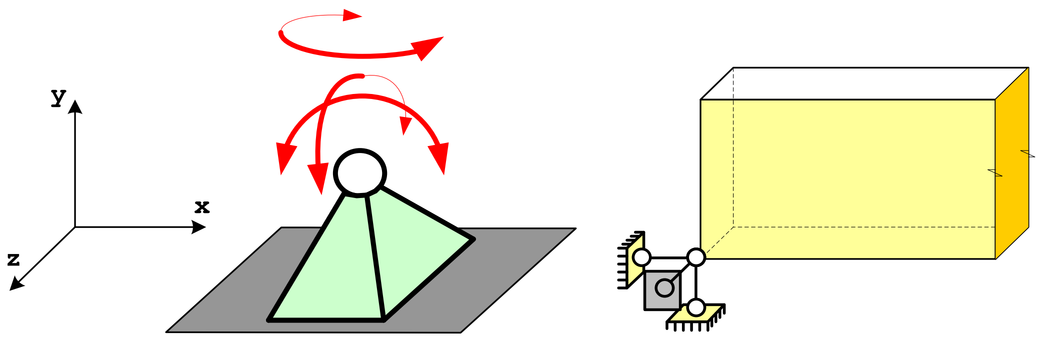
Сведем данные о рассмотренных видах опорах в таблицу:

№	Наименование опоры	Разрешенные формы движения тела		
		Перемещения		Поворот
		по x	по y	отн. z
1	Шарнирно-неподвижная опора	—	—	+
2	Шарнирно-подвижная опора	+	—	+
3	Жесткая заделка	—	—	—
4	Скользящая заделка	+	—	—

Опоры, используемые в пространственных расчетных схемах

1. Неподвижный шаровой шарнир.

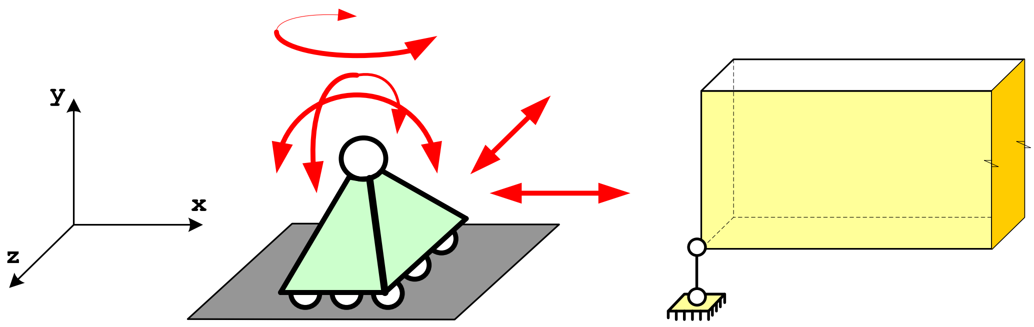
Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



3 связи + 3 степени свободы = 6 степеней свободы свободного тела

2. Подвижный шаровой шарнир.

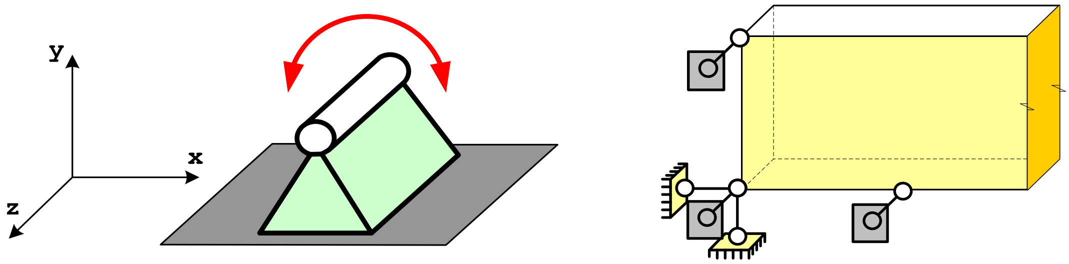
Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



1 связь + 5 степеней свободы = 6 степеней свободы свободного тела

3. Неподвижный цилиндрический шарнир.

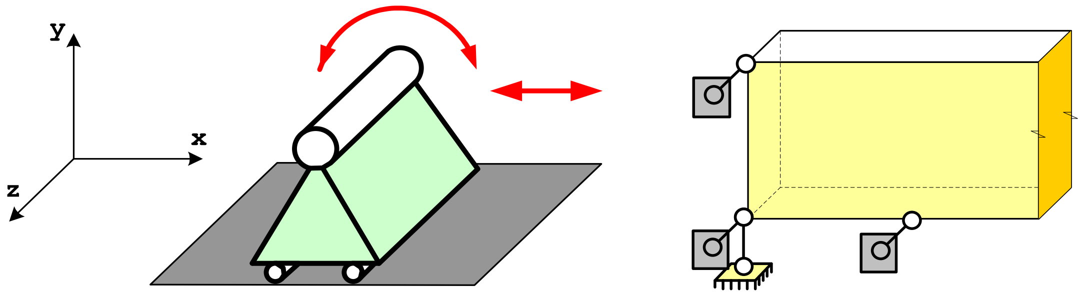
Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



5 связей + 1 степень свободы = 6 степеней свободы свободного тела

4. **Подвижный цилиндрический шарнир.**

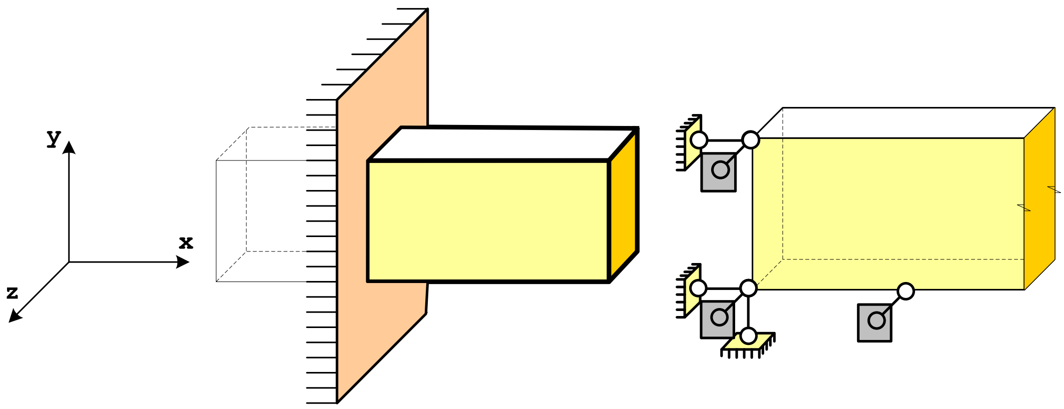
Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



4 связи + 2 степени свободы = 6 степеней свободы свободного тела

5. **Жесткая заделка.**

Схематическое изображение опоры. Эквивалентное расположение связей.



6 связей + 0 степеней свободы = 6 степеней свободы свободного тела

Примечание

В каждой из перечисленных выше опор по направлению запрещенных степеней свободы возникают соответствующим образом направленные реакции, причем:

- по направлению запрещенных перемещений возникает реакция в виде силы,
- по направлению запрещенного поворота возникает реактивный момент.

Сведем данные о рассмотренных видах опорах в таблицу:

№	Наименование опоры	Разрешенные формы движения тела					
		Перемещения			Повороты		
		по x	по y	по z	отн. x	отн. y	отн. z
1	Неподвижный шаровой шарнир	–	–	–	+	+	+
2	Подвижный шаровой шарнир	+	–	+	+	+	+
3	Неподвижный цилиндрический шарнир	–	–	–	–	–	+
4	Подвижный цилиндрический шарнир	+	–	–	–	–	+
5	Жесткая заделка	–	–	–	–	–	–

Тема 3.

ВЕКТОР СИЛЫ, ОПЕРАЦИИ НАД СИЛАМИ

3.1. ПРОЕКЦИИ СИЛЫ

Пусть в трехмерном пространстве задана ось L, направление которой указано вектором единичной длины $\vec{e}$ (направляющим вектором), и вектор $\vec{F}$, начало которого находится в т. A, а конец, — в т. B (рис. 3.1).
Через точки A и B проведем перпендикулярно оси L две плоскости: Π_1 и Π_2.
Параллельно оси L через точку A проведем направление n.
Дадим определение.
Проекцией вектора на ось называется скалярная величина равная произведению модуля вектора на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.
То есть проекция вектора $\vec{F}$ на ось L, которую мы обозначим F_L, равна

$$F_L = F\cos(\vec{F},\vec{e}) = F\cos\alpha\,.$$

Можно дать и другое определение проекции вектора на ось.
Проекцией вектора на ось называется скалярное произведение вектора на направляющий вектор оси.
Действительно, $F_L = \vec{F}\cdot\vec{e} = F\cos(\vec{F},\vec{e}) = F\cos\alpha$,
где α — угол между направлением вектора $\vec{F}$ и единичного вектора $\vec{e}$.

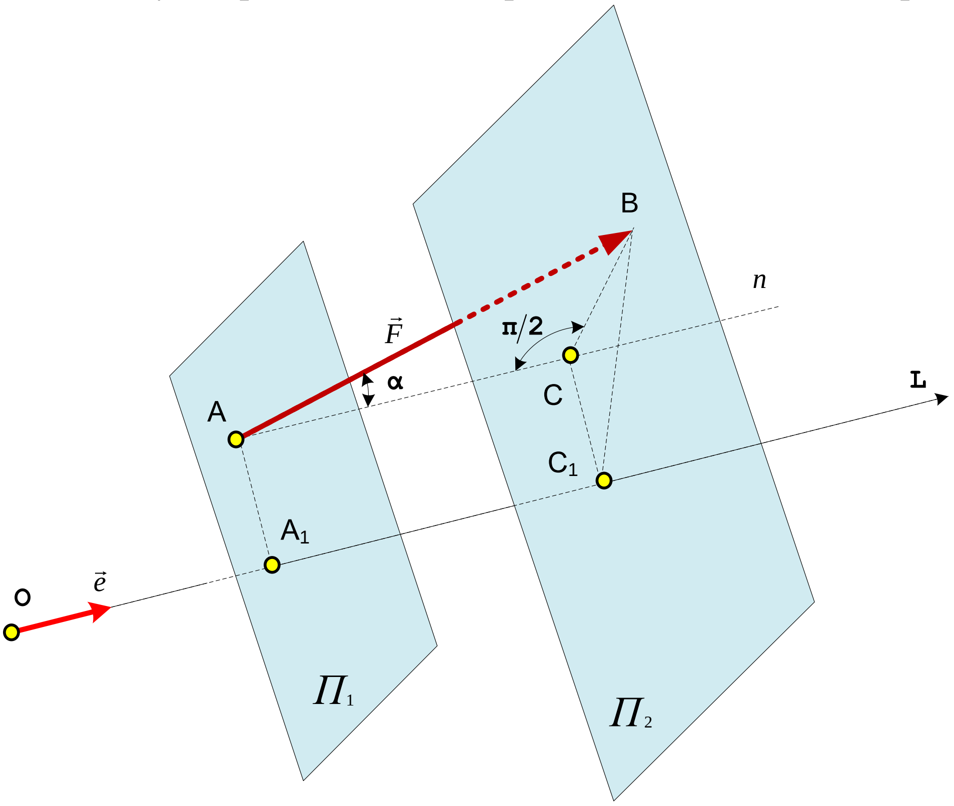


Рис. 3.1

Численно величина проекции вектора на ось равна отрезку AC или отрезку A_1C_1, а знак проекции зависит от величины угла:

- при $\alpha < 90°$ проекция силы положительна,
- при $\alpha > 90°$ — отрицательна,
- при $\alpha = 90°$ — равна нулю.

Рассмотрим некоторые частные случаи проектирования вектора на ось:

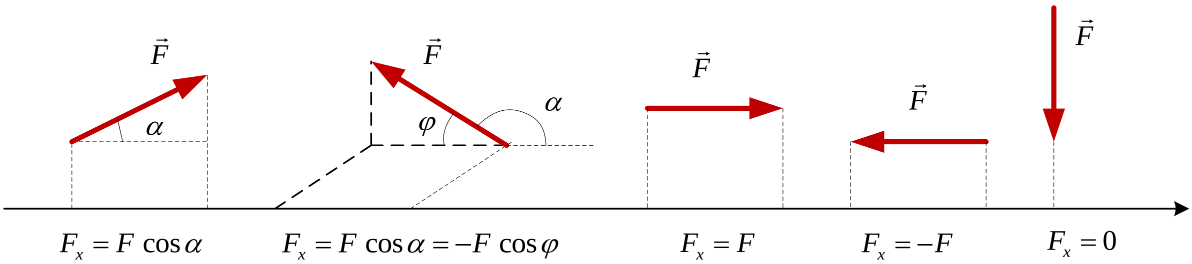


Рис. 3.2

<u>Проекцией вектора на плоскость</u> называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца вектора на эту плоскость.

Так на рис. 3.3 вектор $\vec{F}_{xy}$ является проекцией вектора $\vec{F}$ на плокость Oxy.

Если вектор задан выражением

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\ ,$$

то **<u>аналитическое выражение проекции</u>** этого вектора на плоскость Oxy можно получить, приравняв к нулю проекцию вектора на ось z:

$$\vec{F}_{xy} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + 0\vec{k}\ .$$

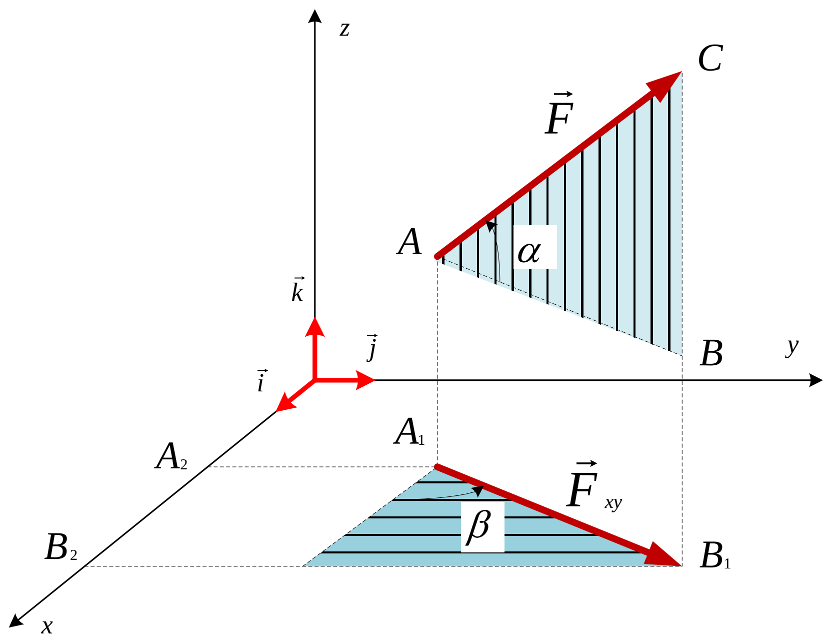


Рис. 3.3

Аналогично проектируется сила и на две другие плоскости.

Модуль этого вектора равен:

$$F_{xy} = A_1B_1 = AB = AC\cdot\cos\alpha = F\cdot\cos\alpha$$

Для определения проекции силы на ось удобно сначала спроектировать силу на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию спроектировать на ось.

$$F_{xy} = F \cdot \cos\alpha$$

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\beta = F \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Этот прием называют **<u>методом двойного проектирования</u>**.

<u>Заметим, что</u>

1. Проекции вектора на параллельные оси равны.
2. Проекции вектора на параллельные плоскости геометрически равны.

3.2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ СИЛЫ

Рассмотрим силу $\vec{F}$, которая представлена вектором с началом в точке A и с концом в точке B (рис. 3.4).

Для указания точки приложения силы используем радиус-вектор

$$\vec{r} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k},$$

соединяющий начало системы координат и точку приложения силы.

Проекции вектора $\vec{r}$ на координатные оси равны координатам точки A, в которой приложена сила $\vec{F}$.

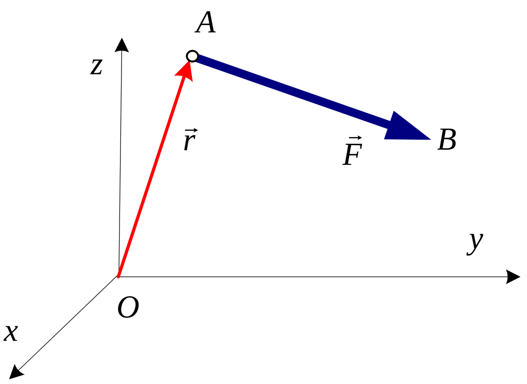


Рис. 3.4

Информация о величине и направлении силы $\vec{F}$ может быть представлена двумя способами.

Первый способ

Представим вектор силы в виде произведения (рис. 3.5, а)

$$\vec{F} = \vec{e}_F F,$$

где F – модуль силы, а $\vec{e}_F$ – единичный вектор, указывающий направление силы (направляющий вектор):

$$\vec{e}_F = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k},$$

где n_x, n_y, n_z – направляющие косинусы вектора (рис. 3.5, а):

$$n_x = \cos\alpha, \quad n_y = \cos\beta, \quad n_z = \cos\gamma.$$

Чтобы таким способом задать вектор, необходимо знать углы α, β, γ и значение его модуля $-$ F.

Второй способ

Вектор может быть представлен в виде суммы трех векторов (рис. 3.5, б), каждый из которых направлен вдоль соответствующей координатной оси:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z .$$

Составляющие вектора в свою очередь равны:

$$\vec{F}_x = F_x\,\vec{i}\,, \qquad \vec{F}_y = F_y\,\vec{j}\,, \qquad \vec{F}_z = F_z\,\vec{k}\,,$$

где F_x, F_y, F_z $-$ проекции вектора $\vec{F}$ на координатные оси (рис. 3.5, б).

Чтобы так задать вектор необходимо знать три его проекции F_x, F_y, F_z.

Переход от одного представления к другому выполняется просто.
Допустим, что вектор задан вторым способом, при котором известны три его проекции $-$ F_x, F_y, F_z.

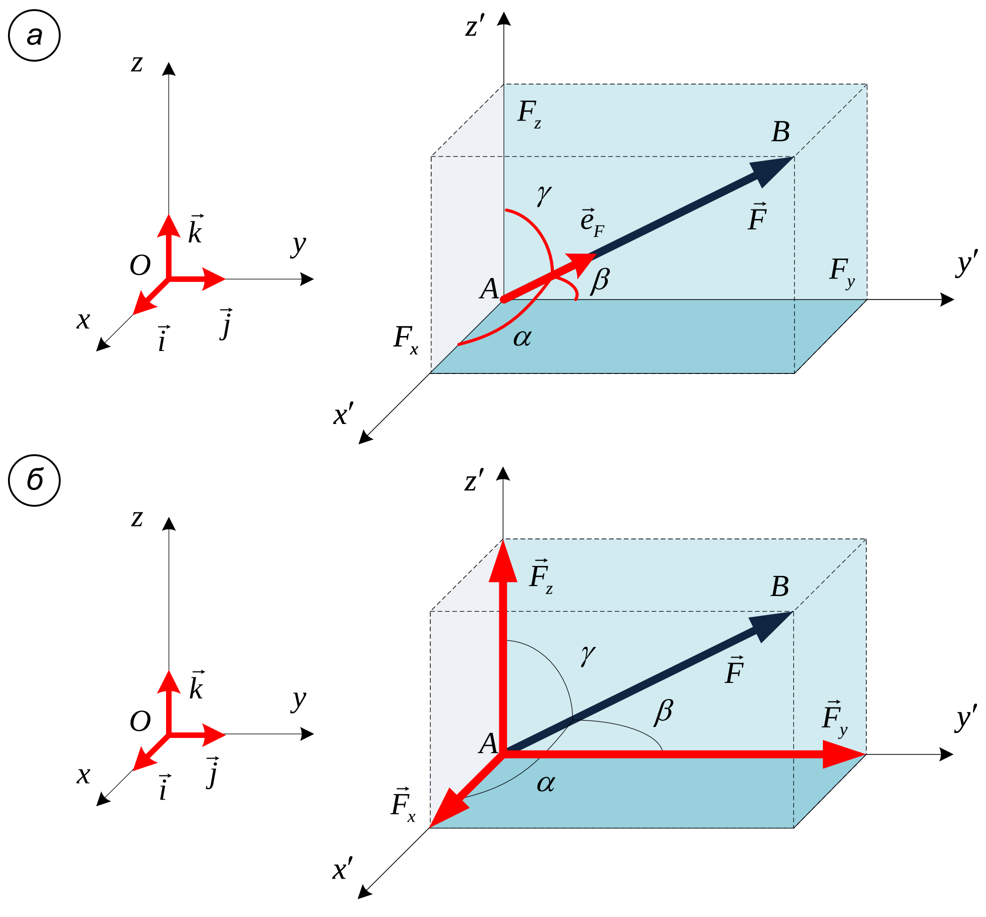


Рис. 3.5

Тогда модуль вектора можно найти как диагональ параллелепипеда:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,,$$

а направляющие косинусы, для которых выполняется известное соотношение

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1,$$

определить с помощью деления:

$$n_x = F_x/F, \quad n_y = F_y/F, \quad n_z = F_z/F,$$

В случае, когда вектор лежит в одной координатной плоскости, например в плоскости Oxy, формулы упростятся и приобретут следующий вид:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

$$n_x = F_x/F, \qquad n_y = F_y/F,$$

причем $$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

3.3. СЛОЖЕНИЕ СИЛ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ, ТРЕУГОЛЬНИК СИЛ

Существует три способа сложения сил:

1) графический
2) геометрический (графоаналитический)
3) аналитический.

Графический способ сложения сил заключается в построении параллелограмма сил с помощью карандаша и линейки в заданном масштабе.

В настоящее время этот способ практически не применяется.

При сложении двух сил по правилу параллелограмма силовой треугольник может быть построен одним из двух способов (рис. 3.6).

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить, используя формулы тригонометрии для треугольников. На этом основан **геометрический способ**.

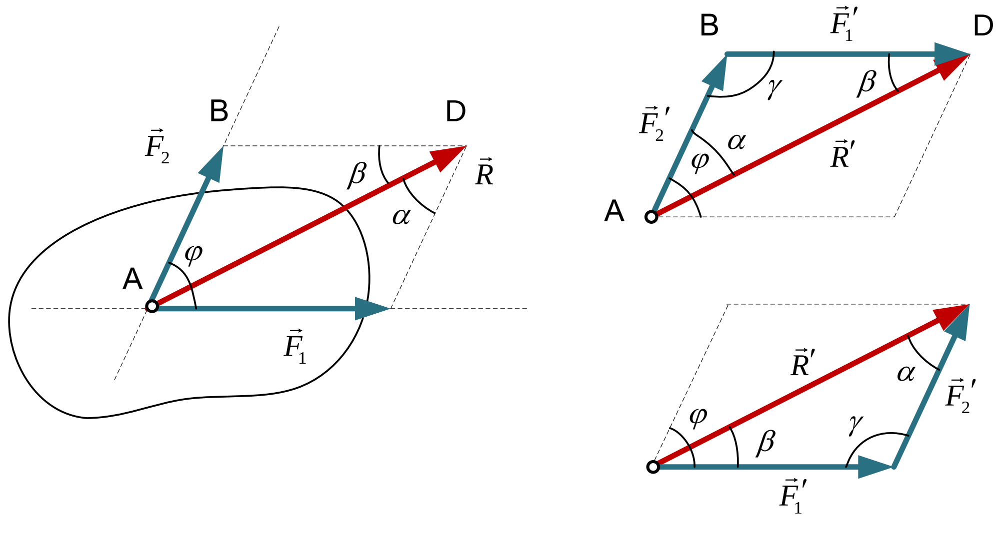


Рис. 3.6

По теореме косинусов для треугольника имеем:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \varphi) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi,$$

откуда модуль равнодействующей

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}.$$

По теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin\gamma}=\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}.$$

Отсюда можно определить направление равнодействующей.
Суммирование нескольких сил может выполняться путем последовательного построения силовых треугольников.

3.4. МНОГОУГОЛЬНИК СИЛ, ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИСТЕМЫ СИЛ

Пусть на абсолютно твердое тело действует система сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ (рис.3.7).

Вектор, равный векторной (геометрической) сумме сил системы будем называть главным вектором системы сил:

$$\vec{\mathbf{R}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

Главный вектор, как геометрическая сумма всех сил системы, никак не связана с какой-то определенной точкой пространства. Можно сказать, что главный вектор можно определить в любой точке.

Величина и направление главного вектора системы не зависит от положения точки приведения.

Будем обозначать главный вектор $\vec{\mathbf{R}}$, не указывая при этом точку пространства, для которой он был определен.

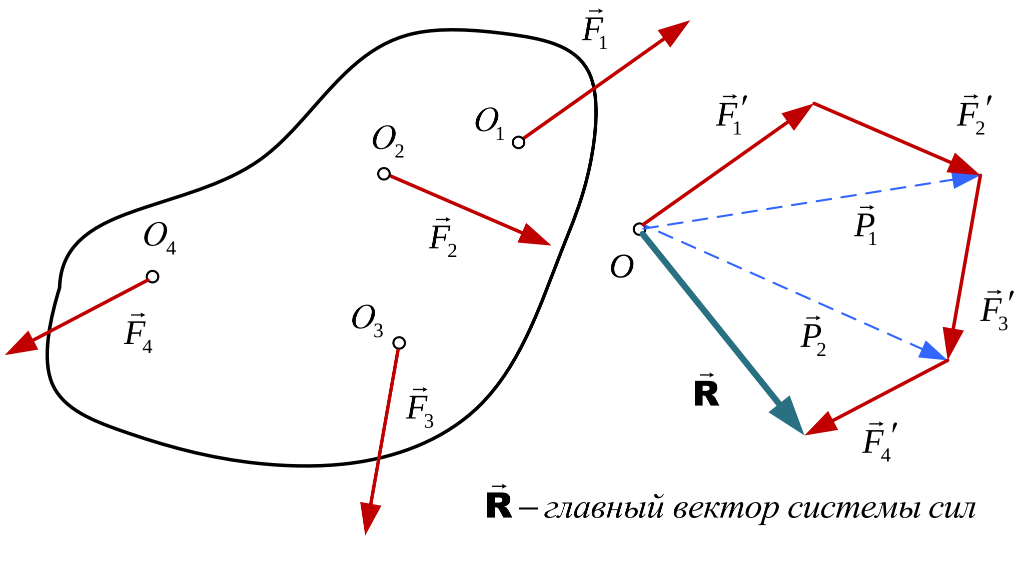


Рис.3.7

Графически главный вектор находится с помощью построения многоугольника сил.

Выберем произвольную точку О, которую будем называть **<u>центром или точкой приведения</u>**. Путем последовательного построения треугольника сил будем суммировать силы $\vec{F}_1', \vec{F}_1', ..., \vec{F}_n'$, которые геометрически равны заданным силам $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$:

$$\vec{P}_1 = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$$

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_1 + \vec{F}_2' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \vec{F}_3' \qquad \text{и так далее.}$$

В результате получим вектор $\vec{\mathbf{R}}$, представляющий собой геометрическую сумму векторов $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Полученная в результате построения геометрическая фигура называется силовым многоугольником.

Силовой многоугольник строится путем совмещения начала каждого следующего вектора с концом предыдущего вектора. При этом промежуточные вектора $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и т.д. показывать не обязательно.

Векторы $\vec{F}_1', \vec{F}_1', ..., \vec{F}_n'$ называются составляющими, а вектор $\vec{\mathbf{R}}$ - замыкающим вектором силового многоугольника.

В случае плоской системы сил возможно графическое построение многоугольника сил в принятом масштабе сил, на чем основан **графический метод решения задач теоретической механики.**

В пространственном случае графическое построение многоугольника сил невозможно.

Рассмотрим систему трех сил (рис. 3.8, а). Выберем некоторую точку приведения A и построим силовой многоугольник двумя способами, суммируя силы в различном порядке (рис. 3.8, б, в).

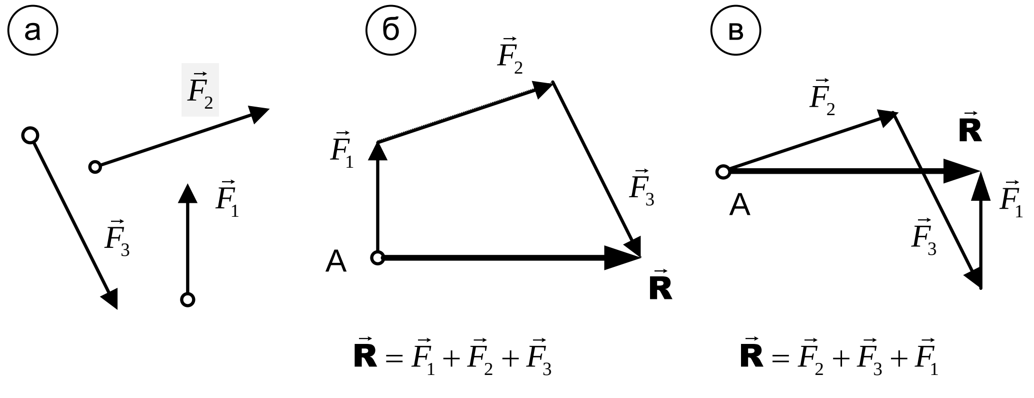


Рис. 3.8

Видно, что форма силового многоугольника зависит от порядка слагаемых, но сам замыкающий вектор от порядка суммирования векторов не зависит.

Главный вектор не зависит от порядка суммирования векторов.

Инвариантами в математике называют величины, которые не зависят от системы отсчета. Поскольку главный вектор не зависит ни от положения точки приведения ни от порядка суммирования векторов, его называют **первым (или векторным) инвариантом системы сил**.

3.5. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СИЛ

При аналитическом способе суммирования векторов используется известная из векторной алгебры теорема.

Проекция суммы векторов на ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Пусть необходимо найти главный вектор системы сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$. Для этого необходимо выполнить сложение n сил:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Поскольку равны векторы, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, должны быть равны и их проекции на ось. Спроектируем это равенство на оси x, y, z:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i\,x} = \sum_{i=1}^{n} X_i\,;$$

$$\mathbf{R}_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i\,y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,;$$

$$\mathbf{R}_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i\,z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i\,;$$

Далее определим модуль суммарного вектора:

$$\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{R}_x^2 + \mathbf{R}_y^2 + \mathbf{R}_z^2}$$

и его направляющие косинусы:

$$n_x = \frac{\mathbf{R}_x}{\mathbf{R}}, \qquad n_y = \frac{\mathbf{R}_y}{\mathbf{R}}, \qquad n_z = \frac{\mathbf{R}_z}{\mathbf{R}},$$

Итак, мы установили, что проекции главного вектора системы сил на оси координат равны суммам проекций этих сил на соответствующие оси.

Рассмотрим случай, когда силовой многоугольник замкнут.

В этом случае модуль главного вектора будет равен нулю:

$$\mathbf{R} = 0 \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\mathbf{R}_x^2 + \mathbf{R}_y^2 + \mathbf{R}_z^2} = 0$$

Последнее равенство возможно только если все слагаемые под корнем равны нулю, то есть если

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{cases} \qquad \text{или иначе} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i = 0 \end{cases},$$

где проекции силы $\vec{F}_i$ обозначены X_i, Y_i, Z_i.

Вывод

Главный вектор системы сил будет равен нулю в том случае, когда все три суммы проекций исходных сил будут равны нулю.

3.6. РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СИЛЫ

Понятие силы, приложенной в точке, есть идеализация, так как взаимодействие тел реально всегда происходит по некоторой площадке или даже по объему (как у гравитационных сил).

Сосредоточенная в точке сила всегда представляет собой равнодействующую некоторой распределенной силы.

В механике имеются три вида моделей распределенных сил:

1) силы, распределенные вдоль линии;
2) силы, распределенные по поверхности, и
3) силы, распределенные по объему.

Рассмотрим первые два случая.

Силы, распределенные вдоль линии

Типичным практическим примером, отвечающим такой модели, является длинный провод, подвергшийся обледенению.

Сила, распределенная вдоль линии, характеризуется ее **интенсивностью** q, которая является мерой величины силы, приходящейся на единицу длины (на погонный метр) и измеряется в Н/м.

Величина интенсивности может быть переменной $q = q(x)$ (рис. 3.9, а) или постоянной $q = const$ (рис. 3.9, б).

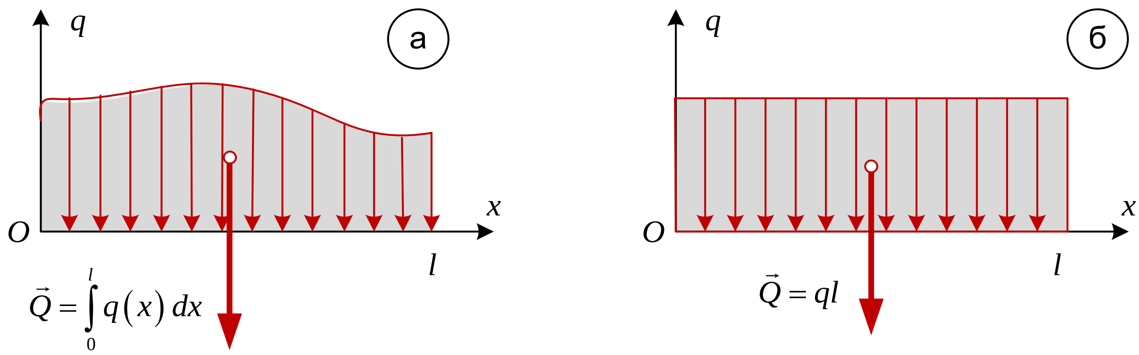


Рис. 3.9

В общем случае силы, распределенной по произвольному закону $q = q(x)$ на участке (O, l), ее равнодействующая Q должна быть вычислена как интеграл и проходить через центр тяжести подграфика интенсивности.

Рассмотрим частные случаи.

Равномерно распределенная сила

Если интенсивность постоянна q = const (см. рис. 3.9, б), то ее равнодействующая равна $Q = ql$ и приложена посередине участка распределения.

Сила, интенсивность которой меняется по линейному закону от 0 до q_{max}

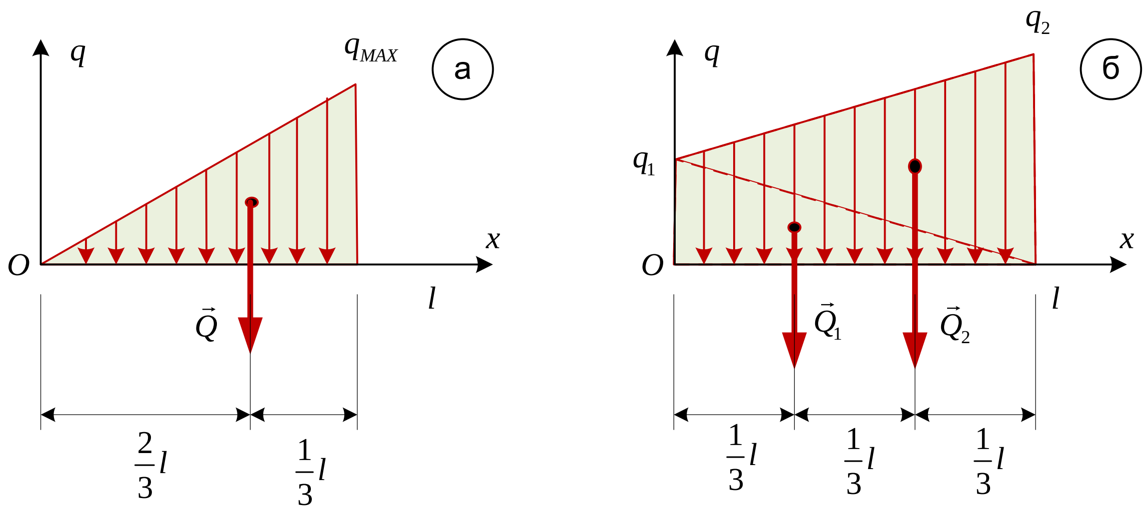


Рис. 3.10

В этом случае (рис. 3.10, а) соответствующий интеграл дает $Q = \frac{1}{2}ql$,

и равнодействующая будет проходить на расстоянии 2l/3 от вершины треугольника интенсивности и на расстоянии l/3 от его основания.
Аналогично определяется равнодействующая, если с ростом координаты x интенсивность убывает от g_{max} до нуля.

Сила, интенсивность которой меняется по линейному закону от q_1 до q_2

В этом случае (рис. 3.9, б) силу удобно разбить на две распределенные силы, рассмотренные в пункте 2 (на рисунке разбиение показано штрихом).

$$Q_1 = \frac{1}{2}q_1 l, \text{ и } Q_2 = \frac{1}{2}q_2 l,$$

Тогда исходная распределенная сила заменится двумя силами, линии действия которых делят участок (O, l) на три равные части.

Силы, распределенные по поверхности

Интенсивность такой силы называется **давлением р** и измеряется в паскалях: 1 Па = 1 Н/м^2.
В простейшем случае равномерно распределенной силы (рис. 3.11) на некотором участке поверхности ее равнодействующая будет равна, как известно, произведению давления на площадь этого участка A: $F = pA$ и будет проходить через центр тяжести этого участка поверхности.

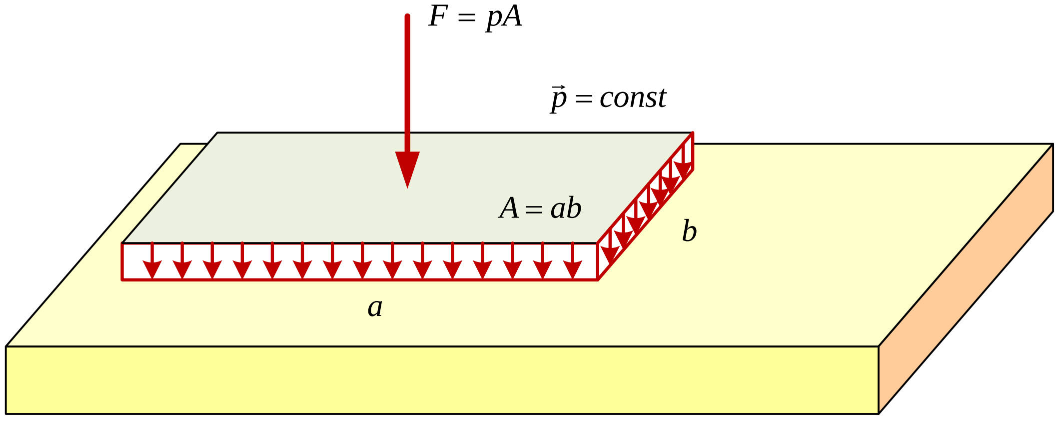


Рис. 3.11

В более сложном случае для определения равнодействующей требуется вычисление интеграла по площади.

1.7. ПОРЯДОК И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАТИКИ

При решении задач статики величины реакций связей, как правило, являются неизвестными.

Порядок решения задач статики

- Выбор тела, равновесие которого должно быть рассмотрено.
- Освобождение тела от связей и изображение действующих на него заданных сил и реакций, возникающих в отброшенных связях.
- Составление условий равновесия.
  Вид условий равновесия зависит от того, какая система сил действует на тело, и какой метод решения задачи будет применяться.
- Определение искомых величин, проверка результатов, анализ полученных результатов.

Методы решения задач статики

Для решения задач статики используют три метода: графический, графоаналитический и аналитический.

Графический метод

Выбирается масштаб сил. Заданные силы в масштабе изображаются на чертеже. Далее на чертеже показываются и измеряются отрезки, изображающие неизвестные силы. Величины неизвестных сил определяются с использованием масштаба.

Графоаналитический (геометрический) метод

Геометрический метод удобно применять, когда число действующих на тело сил равно трем. Начиная с заданной силы, строят силовой треугольник. Решая треугольник, находят величины искомых сил.

Аналитический метод

Выбирают систему координат. Определяют проекции сил на оси. Записывают уравнения равновесия системы сил. Решая систему уравнений, находят величину искомых сил.

Тема 4.

СХОДЯЩИЕСЯ СИСТЕМЫ СИЛ

4.1. ПРИВЕДЕНИЕ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ СИЛ К РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Сходящейся системой сил называются совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке − **точке схода**.
Простейшая система сходящихся сил (две силы) была рассмотрена в аксиоме параллелограмма сил (см. рис. 4.1), где указывалось, что их равнодействующая изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.

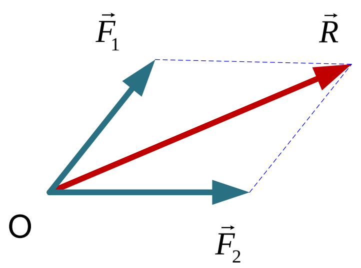


Рис. 4.1

Рассмотрим (рис. 4.2, а) систему трех сил $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\right)$, приложенных в точке О.

По аксиоме 3 определим равнодействующую первых двух сил:

$$\vec{P}\equiv\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right),$$

Затем по той же аксиоме найдем равнодействующую сил $\vec{P}$ è $\vec{F}_3$.

$$\vec{R}\equiv\left(\vec{P},\vec{F}_3\right)\equiv\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\right),$$

линия действия которой также пройдет через точку О. Полученная сила эквивалентна всей системе и, следовательно, является ее равнодействующей. Ее линия действия проходит через точку схода системы, а сама она равна геометрической сумме сил системы, то есть главному вектору:

$$\vec{R}=\vec{\mathbf{R}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i, \tag{4.1}$$

который можно найти либо аналитически, либо путем построения силового многоугольника (рис. 4.2, б)
Описанный способ определения равнодействующей можно распространить на случай действия системы *n* сходящихся сил (рис 4.3), которые предварительно следует перенести вдоль линий их действия в точку схода системы.

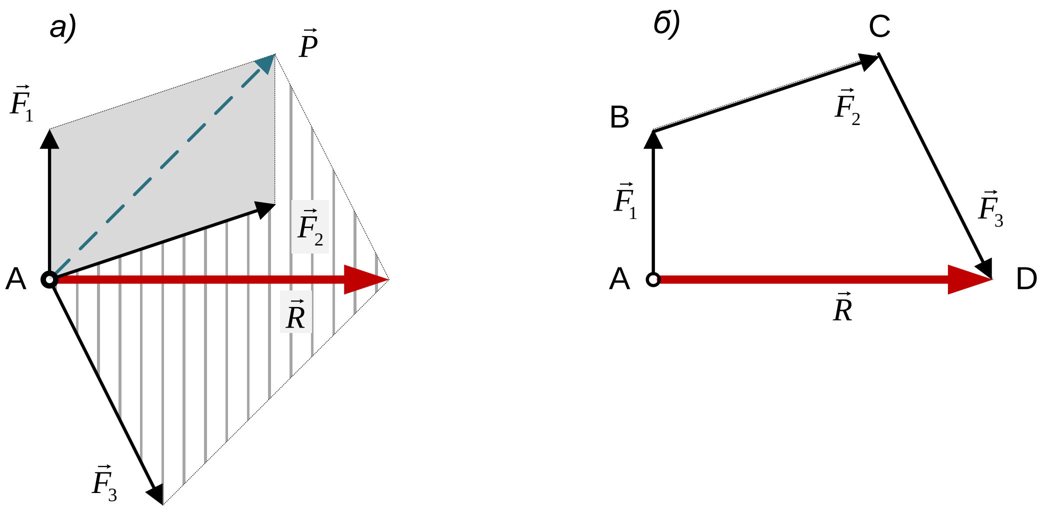


Рис. 4.2.

Итак, **<u>система сходящихся сил имеет равнодействующую, приложенную в точке пересечения линий действия сил, которая геометрически равна главному вектору этой системы сил.</u>**

Главный вектор можно найти для любой системы сил.
Если привязать его к точке схода системы, проведя через нее линию действия главного вектора, то полученная сила будет являться равнодействующей.
Это характерно только для сходящихся систем сил.
Для других систем сил равнодействующая может определяться иначе.
Существуют системы сил, которые вообще не имеют равнодействующй, что означает, что такие системы сил невозможно заменить одной силой.

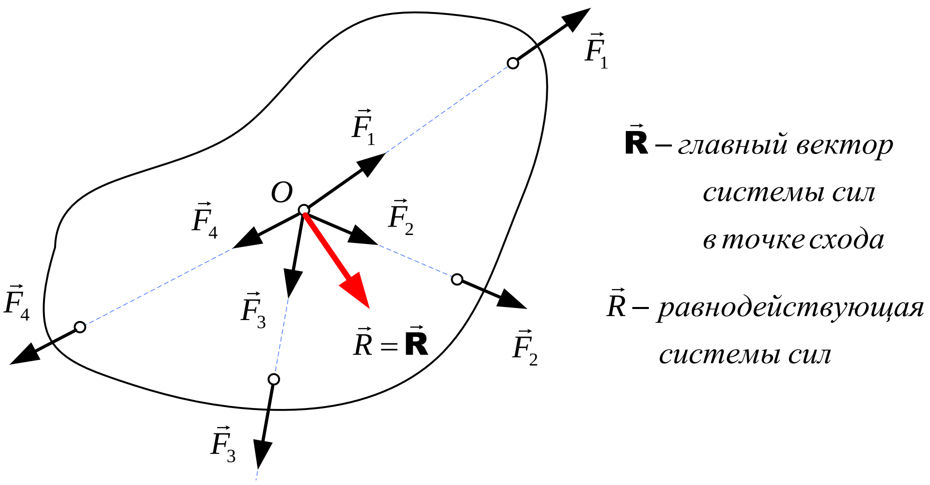


Рис. 4.3

Отсюда следует, что проекции равнодействующей сходящейся системы сил определяются так же, как и проекции главного вектора::

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\,. \tag{4.2}$$

Модуль равнодействующей равен:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\ , \tag{4.3}$$

а ее направляющие косинусы определяются по формулам:

$$n_x=R_x/R,\qquad n_y=R_y/R,\qquad n_z=R_z/R. \tag{4.4}$$

4.2. УСЛОВИЯ УРАВНОВЕШЕННОСТИ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ СИЛ

Система сходящихся сил эквивалентна одной силе — равнодействующей. Равнодействующая сходящейся системы равна ее главному вектору.
В общем случае сходящаяся система не является уравновешенной. Исключение составляет случай, когда равнодействующая, а следовательно и главный вектор этой системы сил равны нулю.

Вывод

Для равновесия системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. В векторной форме:
   главный вектор системы сил должен быть равен нулю,

$$\vec{\mathbf{R}}=0 \quad \text{èëè} \quad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0 \tag{4.5}$$

2. В геометрической форме:
   силовой многоугольник должен быть замкнут.
3. В аналитической форме:
   сумма проекций сил на каждую из координатных осей должна быть равна нулю.

Для системы сходящихся сил в пространстве получаем три уравнения равновесия:

$$\begin{cases}\mathbf{R}_x=0\\ \mathbf{R}_y=0\\ \mathbf{R}_z=0\end{cases} \quad \text{èëè} \quad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iz}=0\end{cases} \tag{4.6}$$

(где в формулах подразумевается суммирование по всем действующим силам), а для системы сходящихся сил, расположенных в одной плоскости (например, в плоскости xy), только два уравнения равновесия:

$$\begin{cases}\mathbf{R}_x=0\\ \mathbf{R}_y=0\end{cases} \quad \text{èëè} \quad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}=0\end{cases},$$

поскольку третье уравнение будет выполняться автоматически.

При решении задач статики мы изначально предполагаем, что тела находятся в равновесии, т. е. действующие на них системы сил уравновешены, и тогда для них справедливы приведенные выше условия в любой из трех форм.

4.3. СТАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

При решении задач статики величины реакций связей являются неизвестными. Число этих величин зависит от числа и характера наложенных связей.

Чтобы определить неизвестные реакции, необходимо, чтобы число неизвестных реакций связей было равно числу линейно независимых уравнений равновесия, содержащих эти реакции.

Механическая система, для которой число неизвестных величин реакций связей равно числу уравнений равновесия статики, называется **статически определимой**.

Если число неизвестных реакций больше, чем число уравнений равновесия, то механическая система называется **статически неопределимой**.

Пример статически неопределимой системы дает груз, подвешенный на трех тросах, расположенных в одной плоскости (рис. 4.4, а). Число неизвестных реакций связей здесь — три, а уравнений равновесия всего два (см. §4.2).

Статическая неопределимость появляется из-за наложения **лишних связей** (или неправильного их расположения).

Если один из тросов убрать, то система становится статически определимой (рис. 4.4, б). В теоретической механике рассматриваются только статически определимые системы.

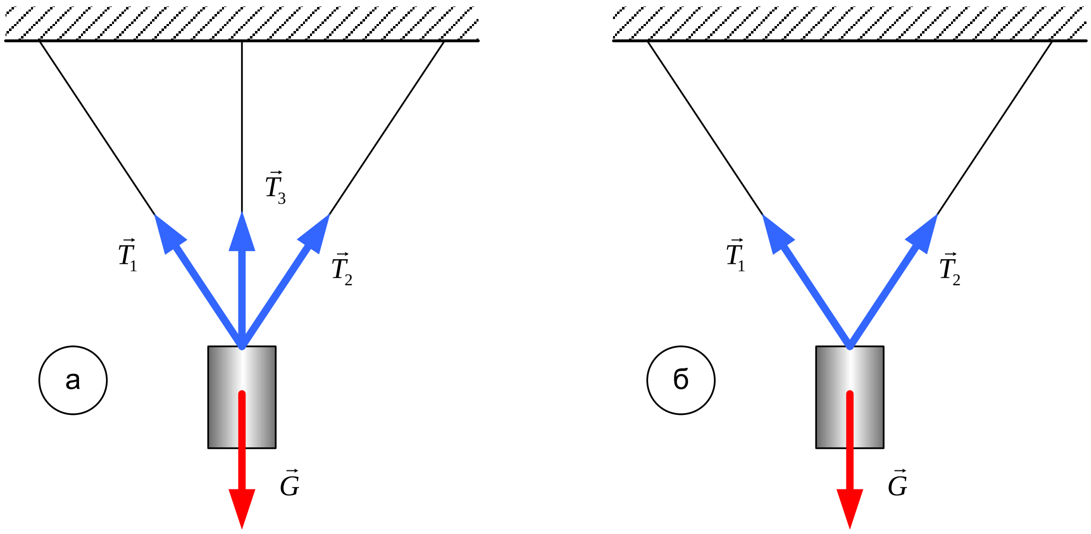


Рис. 4.4

Статически неопределимые системы изучаются в курсе сопротивления материалов и в строительной механике, где для их расчетов к уравнениям павновесия добавляются дополнительные уравнения, при составлении которых учитываются деформации тел.

4.4. ТЕОРЕМА О ТРЕХ СИЛАХ

При решении задач иногда удобно пользоваться следующей теоремой:

ТЕОРЕМА

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием трех непараллельных сил, необходимо, чтобы линии их действия пересекались в одной точке.

Доказательство

- Пусть на тело действуют (рис. 4.5) три силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.
- Перенесем силы $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ в точку пересечения линий действия и сложим их: $\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
- Тогда на тело будут действовать только две силы: $\vec{P}$ *и* $\vec{F}_3$.

Под действием двух сил по I аксиоме тело может находиться в равновесии только когда силы $\vec{P}$ *и* $\vec{F}_3$ равны по величине, противоположно направлены и лежат на одной прямой. Отсюда следует необходимость пересечения линий действия трех сил в одной точке.

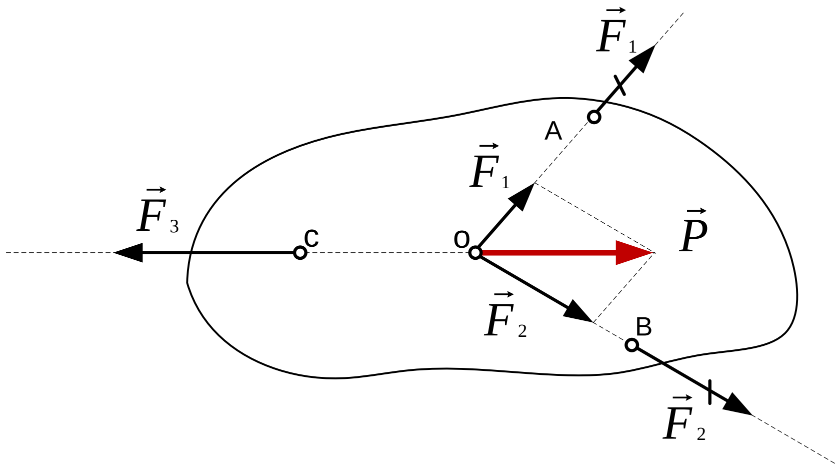


Рис. 4.5

Примечания

- **Пересечение линий действия трех сил в одной точке возможно только при условии, что все три силы лежат в одной плоскости;**
- **Теорема о трех силах дает необходимое условие равновесие, без которого равновесие в принципе невозможно. Достаточным условием является замкнутость силового треугольника.**

ПРИМЕР

Определить направления реакций опор невесомой трехшарнирной арки, находящейся под действием некоторой силы $\vec{F}$ (рис. 4.6, а).

Решение

Арка находится под действием трех сил, однако направления реакций $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ неизвестны.

Поскольку в арке имеется шарнир, расчленим ее по этому шарнир на две части и рассмотрим равновесие каждой части (каждой полуарки) отдельно.

Правая часть находится в равновесии под действием только двух сил $\vec{R}_B$ и $\vec{R}_C$ (где $\vec{R}_C$ — реакция со стороны левой части, т. е. усилие, передаваемое через шарнир). Следовательно, линии действия этих сил совпадают — это линия BC, и при этом $\vec{R}_B = -\vec{R}_C$ (рис. 4.6, в).

Левая часть находится под действием трех сил: $\vec{F}$, $\vec{R}_A$ и $\vec{R}'_C$ (где $\vec{R}'_C$ — реакция со стороны правой части — это такая же по модулю сила, что и $\vec{R}_C$ на правой части, но направленная противоположно, в соответствии с аксиомой равенства действия и противодействия, то есть $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$).

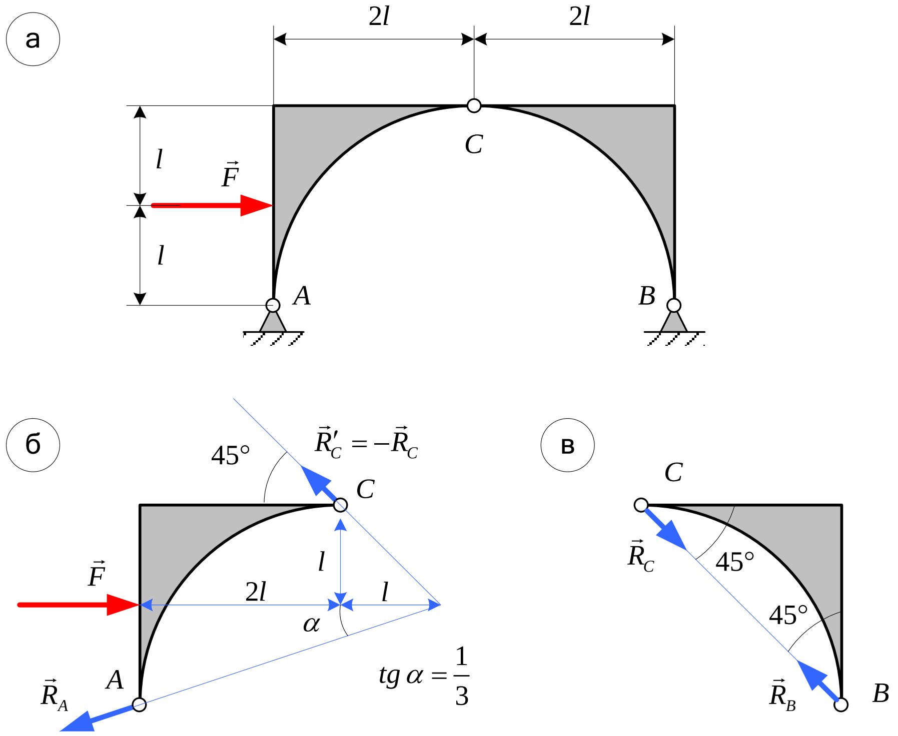


Рис. 4.6

Тогда, по теореме о трех силах, линия действия силы $\vec{R}_A$ проходит через точку пересечения линий действия сил $\vec{F}$ и $\vec{R}'_C$ (рис. 4.6, б). Из полученного рисунка видно, что $tg\,\alpha = 1/3$.

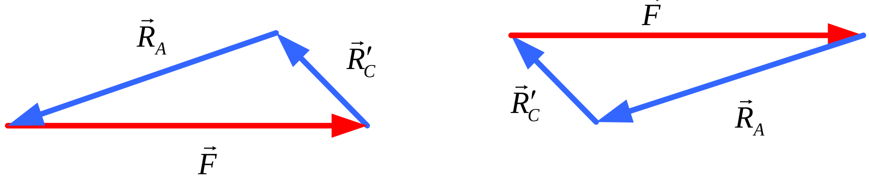


Рис. 4.7

Направление реакций можно определить, построив силовой треугольник для правой части, одним из приведенных на рис 4.7 способов.

Тема 5.

МОМЕНТЫ СИЛЫ

5.1. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Величина модуля и направление силы характеризуют действие силы в том случае, если она придает какому-либо телу поступательное движение. Вращательный эффект силы по отношению к некоторой точке или оси учитывает другая характеристика — момент силы.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O называется величина $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)$, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенного из данной точки в точку приложения силы, на саму эту силу :

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}\,. \tag{5.1}$$

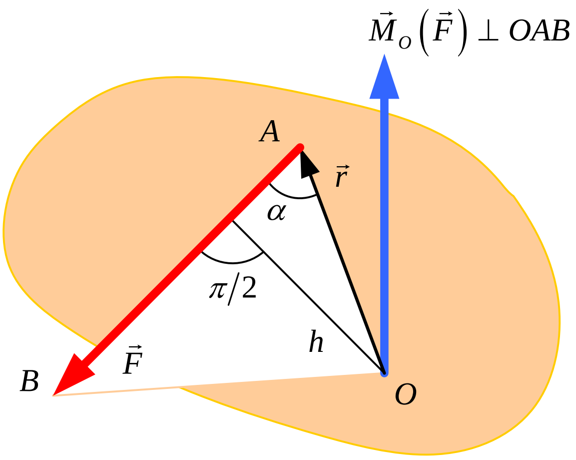


Рис. 5.1

Направление и модуль момента силы определяются по обычному правилу для векторного произведения.

Направление момента силы

Вектор-момент силы перпендикулярен плоскости, проведенной через линию действия силы и точку *O* (рис. 5.1), и направлен так, чтобы, глядя навстречу ему, видеть силу, стремящейся повернуть плоскость против часовой стрелки (правило «правого винта»).

Модуль момента силы

Модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{r}\times\vec{F}\right|=r\cdot F\cdot\sin\alpha,\quad где\ r\cdot\sin\alpha=h \qquad \text{или} \qquad \vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=F\cdot h\,. \tag{5.2}$$

<u>Модуль момента силы</u> относительно точки равен произведению модуля силы на ее плечо. <u>Плечом силы</u> называется кратчайшее (по перпенди-

куляру) расстояние от точки до линии действия силы.
Размерность модуля момента силы [m]= Нм.
Из формулы (5.2) следует, что

1. момент силы относительно точки равен нулю только в том случае, когда ее плечо равно нулю, т. е. когда линия действия силы проходит через эту точку;
2. момент силы не зависит от того, где взята точка приложения силы на линии ее действия;
3. модуль момента силы равен удвоенной площади треугольника, для которого сила является основанием, а плечо высотой (рис. 5.1).

Аналитическое выражение момента силы относительно точки

Пусть задана сила

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

приложенная в точке A, положение которой указано радиус-вектором

$$r = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовых координатных осей,
x, y, z – проекции радиус-вектора,
F_x, F_y, F_z – проекции силы на координатные оси.

Запишем векторное произведение $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F}$ с помощью определителя:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}\times\vec{F} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

или

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_z)\vec{k} \qquad (5.3)$$

Это есть аналитическое выражение момента силы относительно точки.

5.2. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Моментом силы $\vec{F}$ относительно некоторой оси z называется скалярная величина $M_z(\vec{F})$, равная проекции (рис. 5.2) **на эту ось момента силы, вычисленного относительно какой-либо точки О этой оси:**

$$M_z(\vec{F}) = \left(\vec{M}_O(\vec{F})\right)_z \qquad (5.4)$$

Согласно определению, моменты силы относительно координатных осей равны проекциям на эти оси момента силы, вычисленного. относительно точки начала системы координат – точки О.

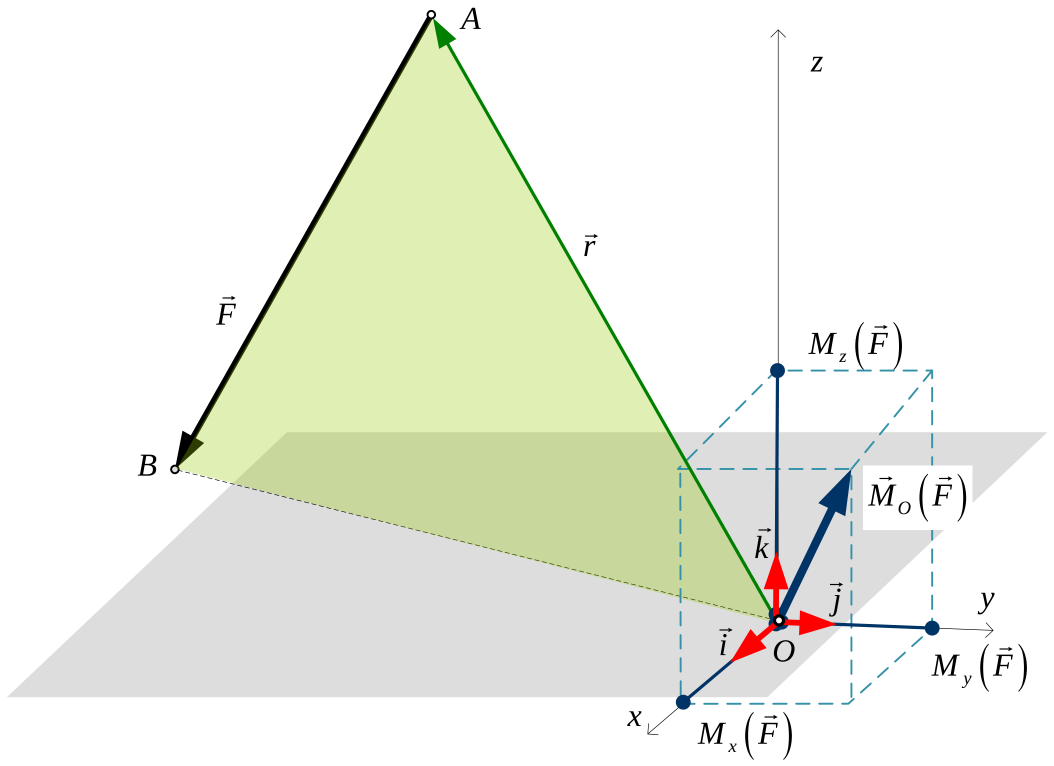


Рис. 5.2

Если представить вектор-момент силы через его проекции на оси (рис. 5.2):

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k}\,, \qquad (5.5)$$

то сравнивая (5.5) с (5.3), получим аналитические выражения для моментов силы относительно координатных осей, проходящих через центр О:

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= (yF_z - zF_y), \\ M_y(\vec{F}) &= (zF_x - xF_z), \\ M_z(\vec{F}) &= (xF_y - yF_x) \end{aligned} \qquad (5.6)$$

5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТА СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКЦИЙ

Выберем точку О, принадлежащую некоторой оси z.
Спроектируем вектора $\vec{F}$ и $\vec{r}$ на плоскость Oxy, которая перпендикулярна оси z. Проекции обозначим $\vec{F}_{xy}$ и $\vec{r}_{xy}$ (рис. 5.3) и заметим, что они равны

$$\vec{F}_{xy} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + 0\vec{k}$$

и

$$\vec{r}_{xy} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}\,.$$

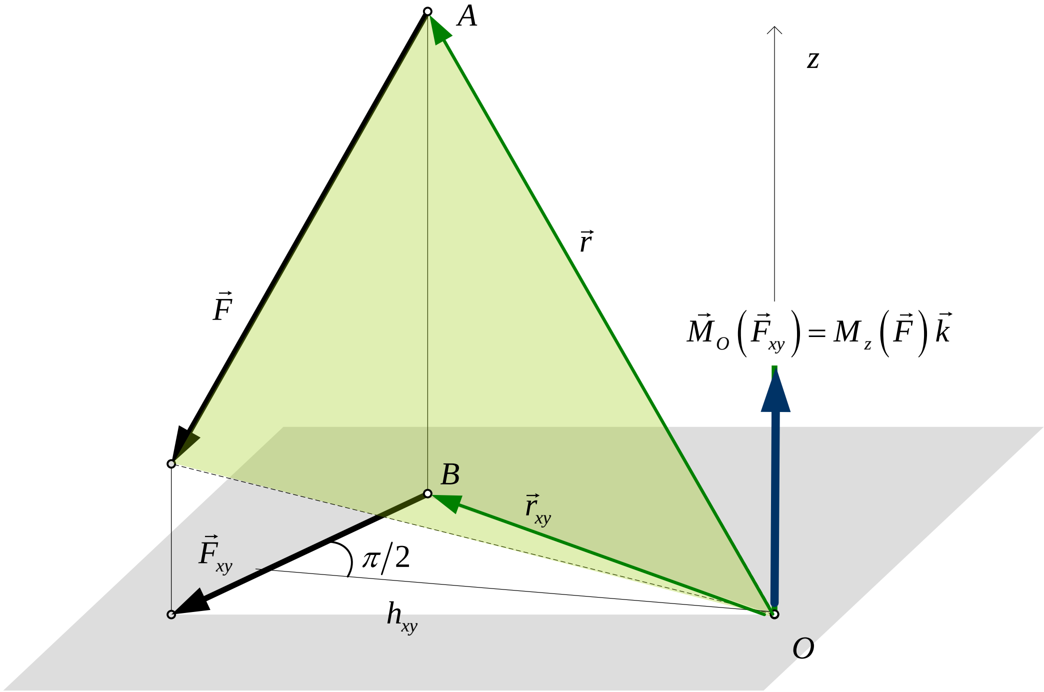


Рис. 5.3

По формуле (5.6) вычислим моменты силы $\vec{F}_{xy}$ относительно координатных осей:

$$M_x\left(\vec{F}_{xy}\right)=0,$$

$$M_y\left(\vec{F}_{xy}\right)=0,$$

$$M_z\left(\vec{F}_{xy}\right)=\left(xF_y-yF_x\right),$$

и тогда по формуле (5.5) получим, что

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_{xy}\right)=M_z\left(\vec{F}\right)\vec{k}=\left(xF_y-yF_x\right)\vec{k}.$$

где $M_z\left(\vec{F}\right)$ есть момент силы $\vec{F}$ относительно оси z.

Момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки O представляет собой вектор $\vec{M}_O\left(\vec{F}_{xy}\right)$ перпендикулярный плоскости Oxy. Проекция его на ось z равна моменту силы $\vec{F}$ относительно оси z.

Поэтому, чтобы вычислить момент силы относительно оси z, надо:

1. Спроектировать силу $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси.
2. Найти модуль момента, для чего следует перемножить модуль проекции F_{xy} на ее плечо h_{xy} относительно точки пересечения оси с плоскостью.
3. Выбрать знак в соответствии с «правилом правого винта».

Получим, что

$$M_z\left(\vec{F}\right)=\pm\, h_{xy}F_{xy}, \tag{5.7}$$

где h_{xy} – плечо силы F_{xy} относительно точки О.

Примечание

1. **Проекции векторов $\vec{F}$ и $\vec{r}$ на все параллельные плоскости равны, поэтому момент силы относительно оси не зависит от положения на ней центра *O*.**
2. **Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаz[:**
   a. **сила параллельна оси,**
   b. **сила пересекает ось.**
3. **Оба эти случая объединяются: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.**

5.3. ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ СИЛ

Главным моментом $\mathbf{M}_O$ системы сил относительно некоторой точки *O* (данного центра) называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно этой точки:

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{M}}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right). \tag{5.8}$$

Аналогично введем другое понятие:

Главным моментом $\mathbf{M}_l$ системы сил относительно некоторой оси *L* называется сумма моментов всех сил системы относительно этой оси:

$$\mathbf{M}_L = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_L\left(\vec{F}_i\right). \tag{5.9}$$

Главный момент системы сил относительно оси равен проекции на эту ось главного момента системы сил, взятого относительно некоторой точки этой оси.

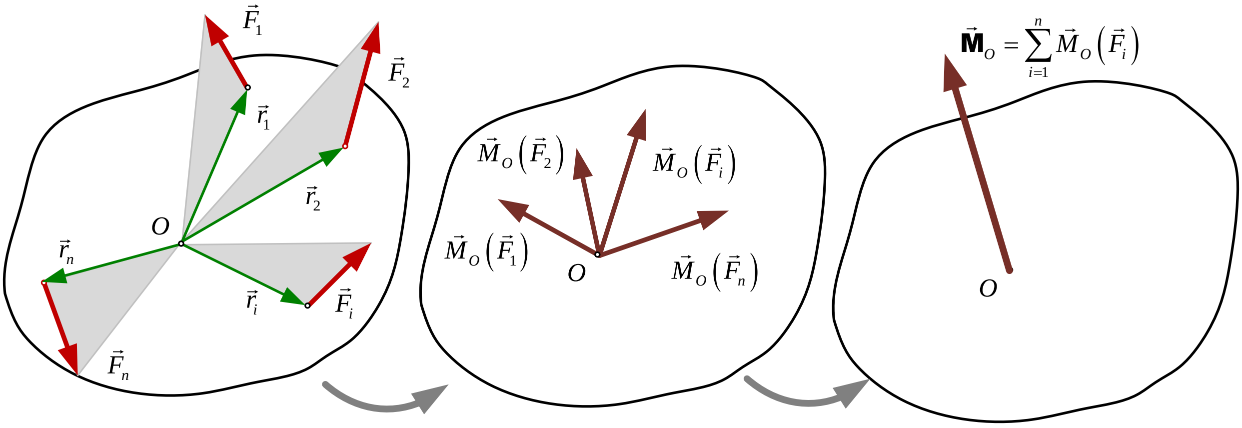


Рис. 5.4

5.4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОГО МОМЕНТА

Для определения главного момента системы сил относительно центра О необходимо сложить n моментов сил:

$$\vec{\mathbf{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

Поскольку равны векторы, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, должны быть равны и их проекции на любую ось.
Спроектируем это равенство на оси x, y, z:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_x = \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right), \\ \mathbf{M}_y = \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right),, \\ \mathbf{M}_z = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right), \end{cases} \tag{5.10}$$

где $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$ – главные моменты сил системы относительно координатных осей, проходящих через центр О,
а $M_x\left(\vec{F}_i\right), M_y\left(\vec{F}_i\right), M_z\left(\vec{F}_i\right)$ – моменты сил системы относительно тех же осей.
Далее определим модуль главного момента:

$$\mathbf{M}_O = \sqrt{\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_y^2 + \mathbf{M}_z^2} \tag{5.11}$$

и его направляющие косинусы:

$$l_x = \mathbf{M}_x / \mathbf{M}_O, \qquad l_y = \mathbf{M}_y / \mathbf{M}_O, \qquad l_z = \mathbf{M}_z / \mathbf{M}_O, \tag{5.12}$$

Рассмотрим случай, когда главный момент равен нулю.
В этом случае модуль главного момента будет равен нулю:

$$\mathbf{M}_O = 0 \qquad \text{или} \qquad \sqrt{\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_y^2 + \mathbf{M}_z^2} = 0$$

Последнее равенство возможно только если все слагаемые под корнем равны нулю, то есть если

$$\begin{cases} \mathbf{M}_x = 0 \\ \mathbf{M}_y = 0 \\ \mathbf{M}_z = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Вывод:

Главный момент системы сил относительно некоторого центра О будет равен нулю в том случае, когда все три суммы моментов исходных сил системы относительно осей проходящих через центр О будут равны нулю.

5.5. ЗАВИСИМОСТЬ ГЛАВНОГО МОМЕНТА ОТ ВЫБОРА ТОЧКИ ПРИВЕДЕНИЯ

Пусть задана произвольная система сил система (рис. 5.5), главный момент которой относительно центра *A* равен

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right).$$

Выберем новый центр приведения − точку *B*, относительно которой положение старого центра *A* определяется радиус-вектором $\vec{r}_0$, а положение некоторой i-й силы системы − радиус-вектором $\vec{r}_i'$, который равен

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_0 + \vec{r}_i$$

Определим главный момент системы сил относительно нового центра *B*.

$$\vec{\mathbf{M}}_B = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\vec{r}_0 + \vec{r}_i\right) \times \vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_0 \times \vec{F}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right).$$

Первое слагаемое представляет собой векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}_0$ на главный вектор системы:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_0 \times \vec{F}_i\right) = \vec{r}_0 \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{r}_0 \times \vec{\mathbf{R}},$$

а второе слагаемое равно главному моменту системы относительно старого центра приведения *A*:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \vec{\mathbf{M}}_A.$$

В результате получаем, что при перемене центра приведения главный момент меняется по закону

$$\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{r}_0 \times \vec{\mathbf{R}}. \qquad (5.14)$$

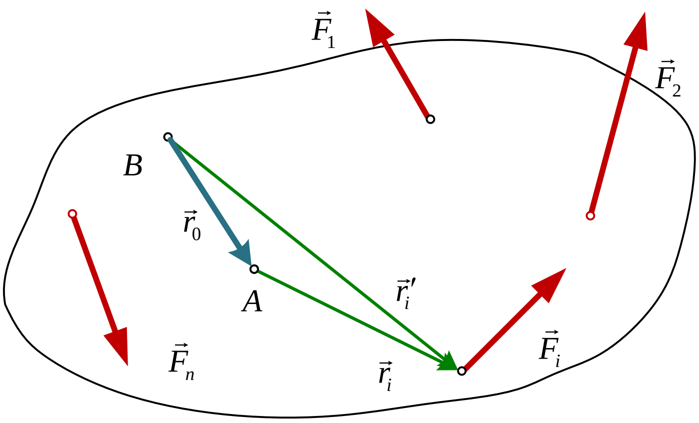


Рис.5.5

Выводы:

1. **В отличие от главного вектора главный момент зависит от положения центра приведения и поэтому не является инвариантом системы сил,**
2. **Если для некоторого главный вектор системы равны нулю ($\vec{\mathbf{R}} = 0$), то главный момент для всех точек пространства будет одинаков, поскольку $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A$. в соответствии с формулой (5.14).**

3. **Если для некоторого центра A главный момент и главный вектор системы равны нулю ($\vec{\mathbf{M}}_A = 0$ и $\vec{\mathbf{R}} = 0$), то главный момент будет равен нулю и относительно любого другого центра.**

5.6. МОМЕНТЫ СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Плоской системой называется система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.

Из рис. 5.6 видно, что при расположении всех сил системы на одной плоскости вектора моментов сил системы относительно точек плоскости расположены к этой плоскости перпендикулярно.

Все вектора моментов расположены параллельно друг другу и для указания их направления достаточно одного знака – знака проекции вектора на ось z, перепендикулярную к плоскости.

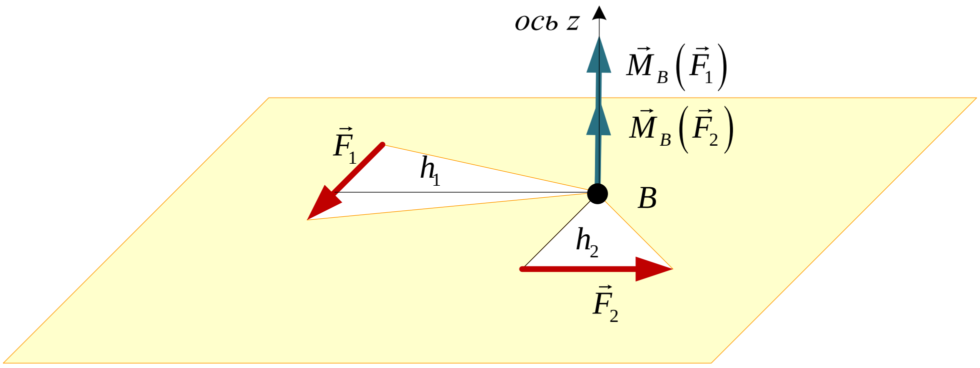


Рис. 5.6

По этой причине при рассмотрении плоских систем под моментом силы относительно точки на самом деле понимают скалярную величину: момент силы относительно оси z, проходящей через моментную точку перпендикулярно к плоскости действия сил.

То есть $$M_B(\vec{F}) = M_Z(\vec{F})$$

Величина момента равна произведению силы на плечо:

$$M_B(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Если момент направлен против часовой стрелки – он считается положительным. При переходе к векторному представлению такое правило знаков соответствует знаку проекции вектор-момента на ось z.

Сложив моменты всех сил системы относительно точки O, получим скалярную величину – **главный алгебраический момент** плоской системы сил относительно точки O:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_Z(\vec{F}_i).$$

Тема 6.

ТЕОРИЯ ПАР

6.1. СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ В ОДНУ СТОРОНУ

До сих пор мы изучили лишь вопрос о сложении сходящихся сил.
Перейдем теперь к сложению сил параллельных, остановившись сначала на случае двух сил.
Здесь возможны два варианта:

1) силы направлены в одну сторону и
2) силы направлены в противоположных направлениях.

Рассмотрим их по порядку.
Чтобы сложить две параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 6.1), приложенные в точках А и В, сделаем несколько переходов к эквивалентным системам сил.

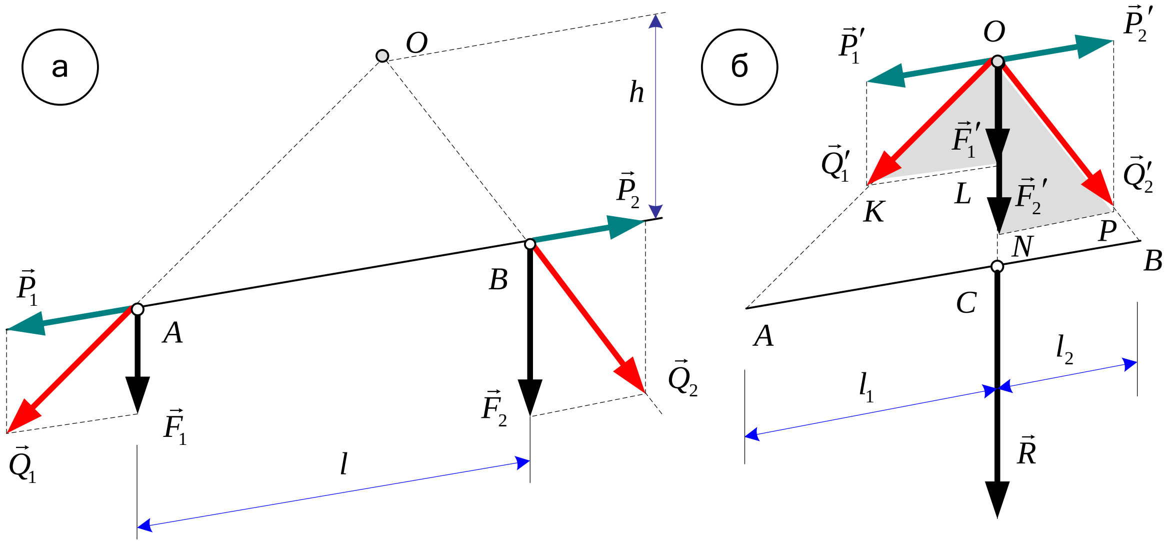


Рис.6.1

- Добавим уравновешенную систему сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Это возможно по аксиоме 2, поскольку$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right) \equiv 0$.
- Заменим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{P}_1$ а также силы $\vec{F}_2$ и $\vec{P}_2$ силами $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$**.** Это возможно по аксиоме 3, поскольку$\left(\vec{P}_1, \vec{F}_1\right) \equiv \vec{Q}_1$, $\left(\vec{P}_2, \vec{F}_2\right) \equiv \vec{Q}_2$.
- Перенесем эти силы в точку О - точку пересечения их линий действия.
- Сделаем обратное разложение сил $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$:

так как $\vec{Q}_1 \equiv \left(\vec{P}_1', \vec{F}_1'\right)$, силу $\vec{Q}_1$ заменим силами $\vec{F}_1'$ и $\vec{P}_1'$

так как $\vec{Q}_2 \equiv \left(\vec{P}_2', \vec{F}_2'\right)$ силу $\vec{Q}_2$ заменим силами $\vec{F}_2'$ и $\vec{P}_2'$.

- По аксиоме 2 исключим уравновешенную систему сил $\left(\vec{P}_1', \vec{P}_2'\right) \equiv 0$.

  Таким образом, исходная система сил заменяется силами, равными $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ и приложенными в точке O.
- Эти две силы мы можем заменить одной силой, равной

$$\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (R = F_1 + F_2).$$

  Для заданной системы сил $\vec{R}$ будет равнодействующей, которую мы получили с помощью эквивалентных преобразований.
- Продолжая линию действия силы $\overline{R}$ до пересечения с прямой АВ в точке С, перенесем точку приложения силы $\overline{R}$ в эту точку.

  Обозначим $AC = l_1$, $CB = l_2$, $AB = l$, $OC = h$.

  Из подобия треугольников, образованных силами в точке О и геометрических треугольников АОС и ВОС видим, что

$$\frac{l_1}{h} = \frac{P_1'}{F_1'} = \frac{P_1}{F_1}, \quad \text{откуда} \qquad h \cdot P_1 = l_1 \cdot F_1,$$

$$\frac{l_2}{h} = \frac{P_2'}{F_2'} = \frac{P_2}{F_2}, \quad \text{откуда} \qquad h \cdot P_2 = l_2 \cdot F_2.$$

Поскольку $P_1 = P_2$ то $l_1 \cdot F_1 = l_2 \cdot F_2$, (6.1)

откуда $$\frac{l_1}{F_2} = \frac{l_2}{F_1}.$$

В пропорции каждый предыдущий член относится к своему последующему, как сумма предыдущих относится к сумме последующих, следовательно:

$$\frac{l_1}{F_2} = \frac{l_2}{F_1} = \frac{l}{R}, \quad \text{где} \quad R = F_1 + F_2. \qquad (6.2)$$

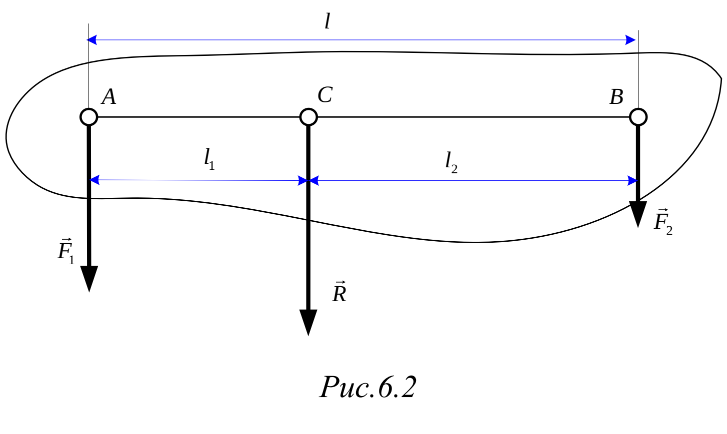


Рис.6.2

Вывод:

равнодействующая двух параллельных одинаково направленных сил (рис. 6.2) равна их главному вектору, а линия ее действия расположена в плоскости сил, на расстояниях от линий действия сил, обратно пропорциональных модулям сил.

Следствие:

Любую силу можно разложить на две параллельные силы, направленные в одну сторону. Это можно сделать бесконечным количеством способов.

Фактически выполнение равенства (6.1) означает, что модули моментов сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно точки С одинаковы, а сумма моментов будет равна нулю: $M_C\left(\vec{F}_1\right)+M_C\left(\vec{F}_2\right)=0$.

6.2. СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ, НАПРАВЛЕННЫХ В РАЗНЫЕ СТОРОНЫ

Пусть в точках А и В твердого тела (рис. 6.3, а) приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не равные по модулю, параллельные и направленные в противоположные стороны. Пусть $F_1 > F_2$.

Разложим силу $\vec{F}_1$ на две составляющие параллельные силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, направленные в одну сторону так, чтобы замена была эквивалентной: $\left(\vec{P}_1+\vec{P}_2\right)\equiv\vec{F}_1$.

Модуль силы P_2 выберем равной величине силы F_2 и приложим (рис. 6.3, б) силу $\vec{P}_2$ в точке приложения силы $\vec{F}_2$.

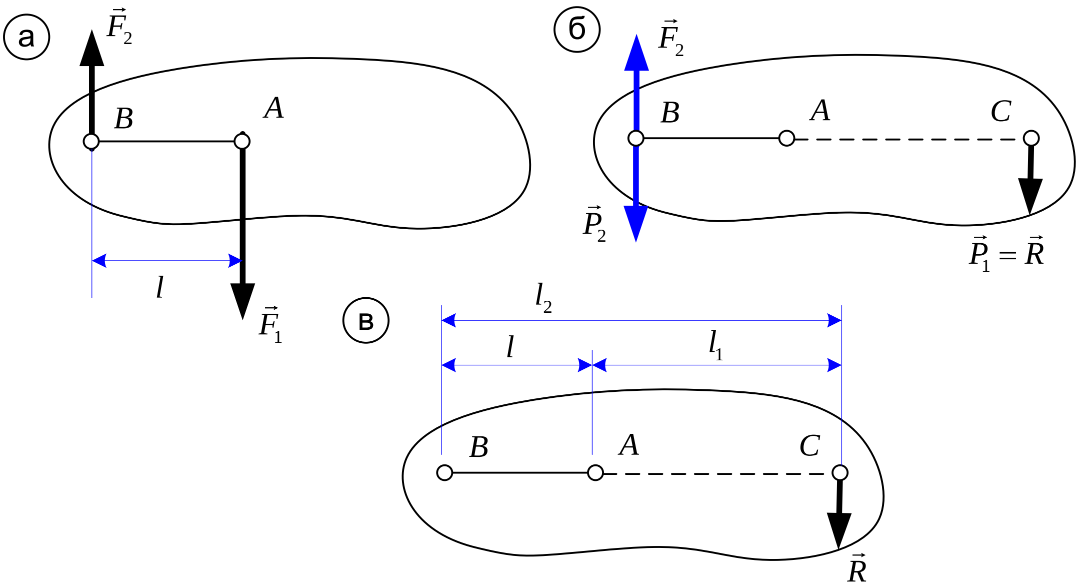


Рис.6.3

Величину и точку приложения силы $\vec{P}_1$ найдем из условия выполнения равенств (6.3), которые в данном случае будут выглядеть так:

$$\frac{AB}{P_1}=\frac{AC}{P_2}=\frac{BC}{F_1} \quad \text{и} \quad F_1=P_1+P_2.$$

Величина силы $\vec{P}_1$ тогда будет равна

$$P_1=F_1-P_2=F_1-F_2$$

Уравновешенная система сил $\left(\vec{F}_2,\vec{P}_2\right)\equiv 0$ может быть исключена.

Сила $\vec{P}_1$ эквивалентна системе $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ и, следовательно, является ее равнодействующей $\vec{P}_1 = \vec{R}$.

Обозначим $AC = l_1$, $CB = l_2$, $AB = l$ и определим величину и точку приложения равнодействующей:

$$R = F_1 - F_2, \quad \frac{l}{R} = \frac{l_1}{F_2} = \frac{l_2}{F_1}.$$

Вывод:

> **равнодействующая двух параллельных противоположно направленных и различных по модулю сил равна их главному вектору, а линия ее действия расположена в плоскости сил, на расстояниях от линий действия сил, обратно пропорциональных модулям сил.**

Следовательно и в данном случае сумма моментов сил относительно точки С будет равна нулю:

$$M_C\left(\vec{F}_1\right) + M_C\left(\vec{F}_2\right) = 0$$

Если система параллельных сил состоит более чем из двух сил, то, последовательно суммируя эти силы, можно найти ее равнодействующую (при условии, что она существует).

6.3. ПАРА СИЛ, МОМЕНТ ПАРЫ

В предыдущем параграфе, суммируя параллельные противоположно направленные силы, мы вводили существенное условие: $\vec{F}_2 \neq \vec{F}_1$, иначе сделанное построение не удалось бы.

При $F_2 = F_1$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ имеет место особый случай. Дадим определение:

> **<u>Парой сил (или просто парой)</u> называется система из двух равных по модулю, противоположно направленных параллельных сил.**

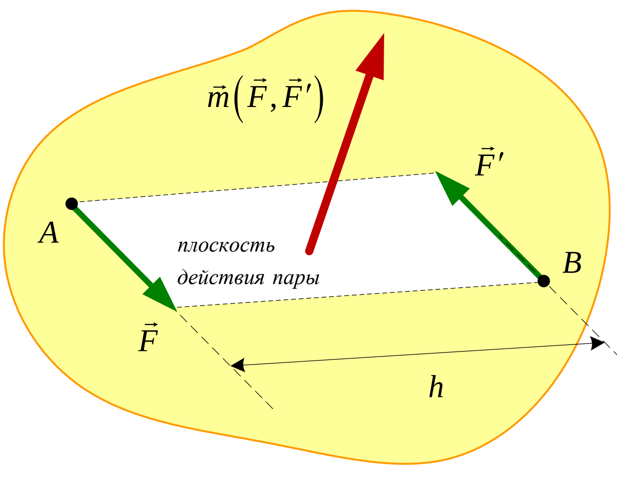


Рис. 6.4

Система сил, образующих пару, не является уравновешенной, что следует из аксиомы 1. В то же время пара сил не имеет равнодействующей, и ее нельзя уравновесить одной силой. Поэтому свойства пары должны изучаться отдельно. **Пара есть особая мера механического взаимодействия.**

> **<u>Сила и пара сил представляют собой два базовых неупрощаемых элемента статики</u>**

Рассмотрим пару, состоящую из сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ (рис. 6.4).
Для них выполняется условие $\vec{F}' = -\vec{F}$ и, следовательно, главный вектор этих сил равен нулю:

$$\vec{F}' + \vec{F} = 0$$

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.
Расстояние между линиями действия сил пары h называется плечом пары.
Введем теперь понятие момента пары.

> **<u>Моментом пары</u>** $\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$ **называется вектор** $\vec{m}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$**, направленный перпендикулярно плоскости действия пары в такую сторону, чтобы, глядя навстречу ему, видеть вращение, осуществляемое парой, происходящим против часовой стрелки** (рис. 6.4)**, и равный по модулю произведению модуля силы на плечо пары:**

$$m\left(\vec{F}, \vec{F}'\right) = F \cdot h = F' \cdot h \tag{6.3}$$

Размерность модуля момента пары [m] = Нм.
Очевидно, что модуль момента пары равен площади параллелограмма, построенного на силах пары.

ТЕОРЕМА

> **Сумма моментов сил, составляющих пару, одинакова относительно любой точки пространства и всегда равна моменту пары.**

Доказательство

Рассмотрим сумму моментов сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ относительно произвольной точки пространства O (рис. 6.5).
Преобразуем ее, введя обозначения $\vec{r} = A\vec{B}, \quad \vec{r}_A = O\vec{A}, \quad \vec{r}_B = O\vec{B}.$, и используя определение момента силы и условие $\vec{F}' = -\vec{F}$.

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}'\right) = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}' = \vec{r}_A \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F} = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Полученная величина действительно не зависит от выбора точки O.
Легко видеть, что этот вектор направлен так же, как и момент $\vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$, а по модулю равен модулю момента:

$$\left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right| F \cdot \sin\alpha = Fh = m\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$$

Таким образом

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}'\right) = \vec{m}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$$

Следствие

Если в качестве центра O последовательно выбирать точки A и B, то можно получить, что

$$\vec{m}\left(\vec{F},\vec{F}'\right)=\vec{M}_A\left(\vec{F}'\right)+\vec{M}_A\left(\vec{F}\right)=\vec{M}_A\left(\vec{F}'\right),$$
$$\vec{m}\left(\vec{F},\vec{F}'\right)=\vec{M}_B\left(\vec{F}\right)+\vec{M}_B\left(\vec{F}'\right)=\vec{M}_B\left(\vec{F}\right).$$

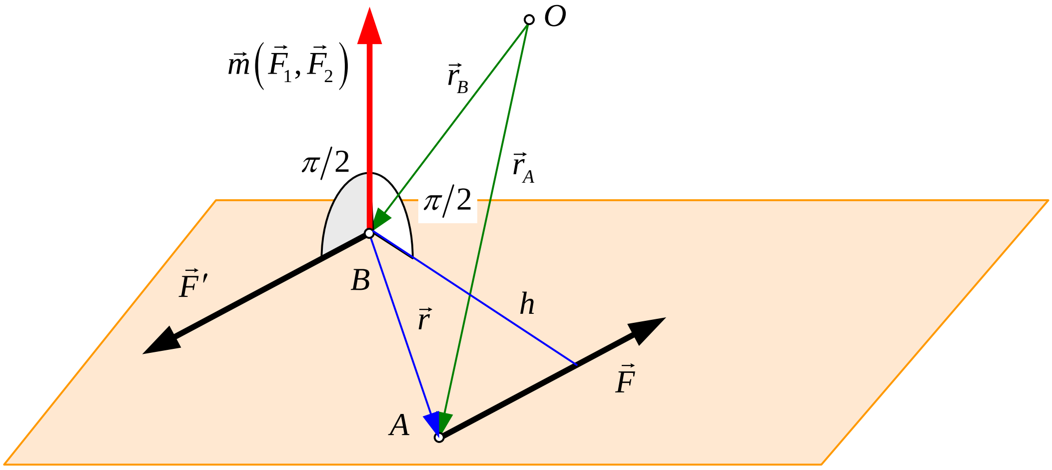


Рис. 6.5

то есть

момент пары сил равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары.

6.4. ТЕОРЕМА ОБ УСЛОВИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПАР

ТЕОРЕМА

Две пары, имеющие векторно-равные моменты, эквивалентны друг другу.

Справедливость этой теоремы равносильна справедливости следующих трех утверждений (трех более простых теорем).

1. **Можно сделать любыми величины модулей сил и плеча пары, сохраняя их произведение, т. е. модуль момента пары.**
2. **Пару можно переносить в любое другое положение в плоскости ее действия (в пределах данного тела).**
3. **Пару можно переносить на параллельную плоскость действия.**

Приведем доказательство этих утверждений.

1-е утверждение (Теорема об изменении плеча и силы пары)

Можно сделать любыми величины модулей сил и плеча пары, сохраняя их произведение, т. е. модуль момента пары.

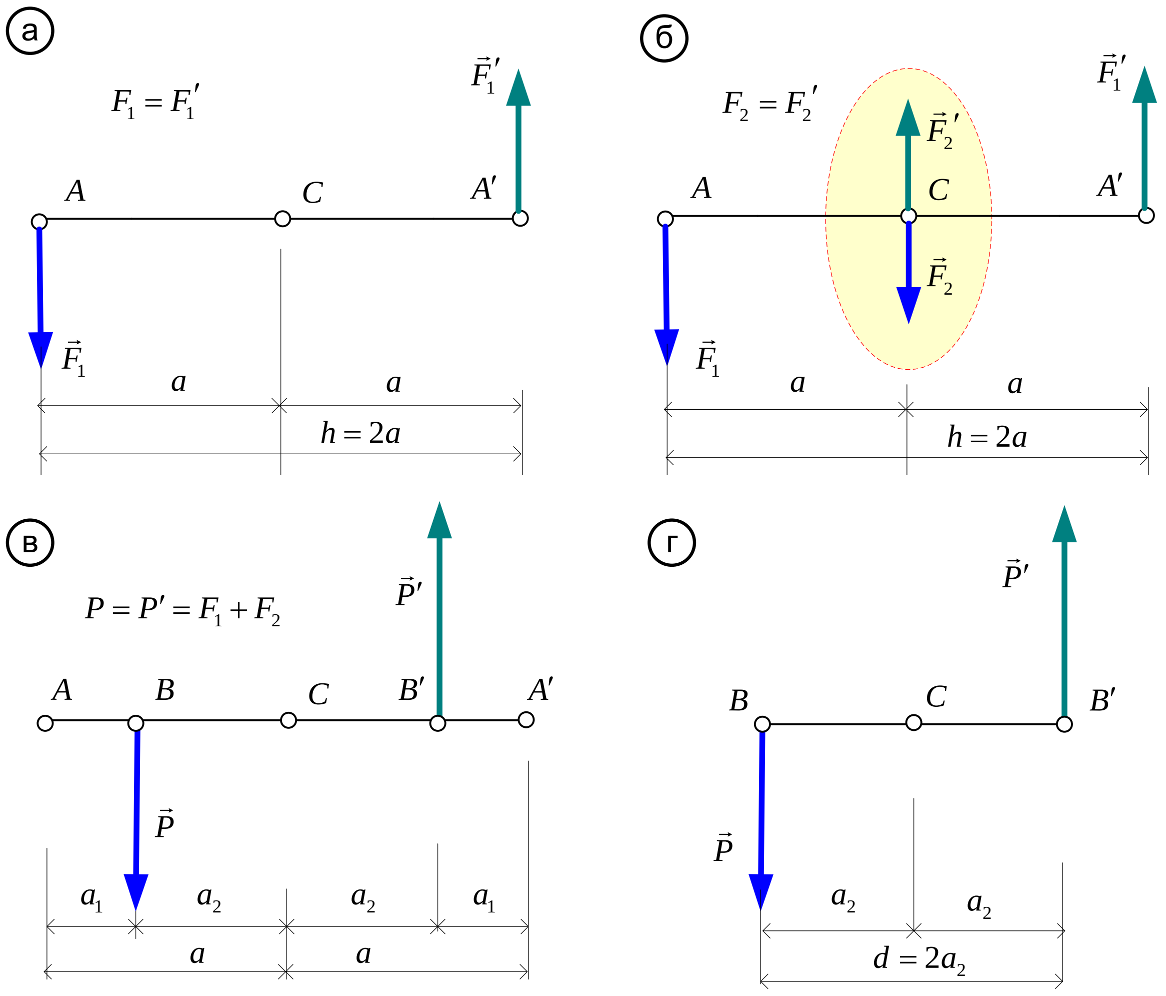


Рис. 6.6

Доказательство

- Пусть в точках A и A' к твердому телу приложены равные по модулю $\left(F_1 = F_1' = F\right)$ силы, образующие пару с плечом $h = 2a$ (рис.6.6, а). Момент этой пары равен $m\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = F_1 h$;
- Приложим в точке С (середина отрезка AA') (рис.6.6, б) систему произвольных по величине сил:
  $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) \equiv 0$, которая уравновешена, так как $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$
- Сложив параллельные силы $\vec{P}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_1'$, $\vec{P}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_2'$, получим пару сил $\left(\vec{P}, \vec{P}'\right)$, приложенных в точках B и B' (рис. 6.6, в), положение которых определяется пропорцией:
  $$\frac{a_1}{F_2} = \frac{a_2}{F_1} = \frac{a}{P},$$
  из которой следует, что

$a_2 P = aF_1$ и далее, что $a_2 = \dfrac{a\,F_1}{P}$

- Момент пары сил $\left(\vec{P}, \vec{P}'\right)$ будет равен

$$m\left(\vec{P}, \vec{P}'\right) = Pd = P \cdot 2a_2 = P \cdot 2\frac{aF_1}{P} = 2aF_1 = Fh = m\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right).$$

$$m\left(\vec{P}, \vec{P}'\right) = m\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$$

Первое утверждение доказано.

2-е утверждение (Теорема о повороте сил пары в ее плоскости)

Пару можно переносить в любое другое положение в плоскости ее действия (в пределах данного тела).

Доказательство

- Проведем две параллельные прямые I и II, расположенные на расстоянии d друг от друга. Под углом к ним проведем еще две такие же прямые I' и II'.
- Пусть на прямых I и II лежат силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ $F_1 = F_2 = F$, образующие пару (рис.6.7), алгебраический момент которой равен $m\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) = Fd$.

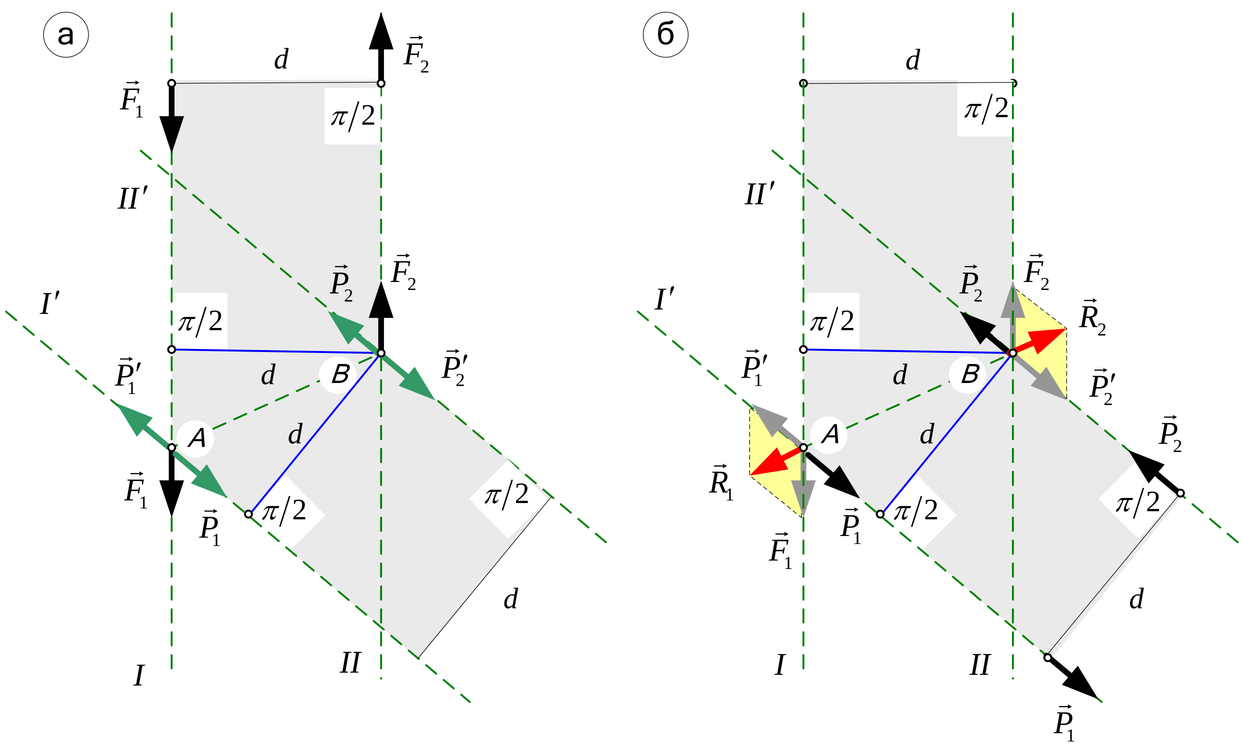


Рис. 6.7.

- Перенесем силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ вдоль линий их действия I и II в точки A и B.
- По направлениям I' и II' приложим две уравновешенные системы сил, которые равны по модулю силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$:

$$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_1'\right) \equiv 0\text{, так как } \vec{P}_1' = -\vec{P}_1$$

и $$\left(\vec{P}_2, \vec{P}_2'\right) \equiv 0\text{, так как, } \vec{P}_2' = -\vec{P}_2$$

причем $P_1 = P_2 = P_1' = P_2' = F_1 = F_2 = F$.

- Сложим силы по правилу параллелограмма (в данном случае параллелограмм имеет форму ромба):

$$\vec{P}_1' + \vec{F}_1 = \vec{R}_1, \qquad \vec{P}_2' + \vec{F}_2 = \vec{R}_2.$$

- Полученные силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ равны, противоположно направлены $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$, лежат на одной прямой и, следовательно, по I аксиоме образуют уравновешенную систему, которая может быть исключена.
- Оставшиеся силы $\vec{P}_1$ *и* $\vec{P}_2$ образуют систему, которая эквивалентна заданной системе сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Убедимся, что момент пары в результате проделанных эквивалентных преобразований не изменился:

$$m\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) = m\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2\right) = Fd.$$

Второе утверждение доказано.

3-е утверждение (Теорема о переносе пары в параллельную плоскость)

Пару можно переносить на параллельную плоскость действия.

Доказательство

- Пусть к твердому телу приложена пара сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ с плечом AB (рис.6.8), которые лежат в плоскости Π_1.
- Параллельно плоскости Π_1 проведем плоскость Π_2 и проведем на ней отрезок A_1B_1, который равен и параллелен отрезку AB.
- В точках A_1 и B_1 приложим две уравновешенные системы сил,:

$$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_1'\right) \equiv 0\text{, так как } \vec{P}_1 = -\vec{P}_1' \quad \text{и} \quad \left(\vec{P}_2, \vec{P}_2'\right) \equiv 0\text{, так как } \vec{P}_2 = -\vec{P}_2',$$

силы которых равны по модулю

$$P_1 = P_2 = P_1' = P_2' = F_1 = F_2 = F.$$

- Сложим параллельные силы и направленные в одну сторону силы, приложенные в противоположных углах параллелограмма:

$$\vec{F}_1 + \vec{P}_2' = \vec{R}, \quad \vec{F}_2 + \vec{P}_1' = \vec{R}'.$$

Результирующие силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ равны по модулю, противоположно направлены и приложены в одной точке, совпадающей с точкой пересечения диагоналей параллелограмма, поэтому они образуют уравновешенную систему $\left(\vec{R}, \vec{R}'\right) \equiv 0$, которую можно исключить.

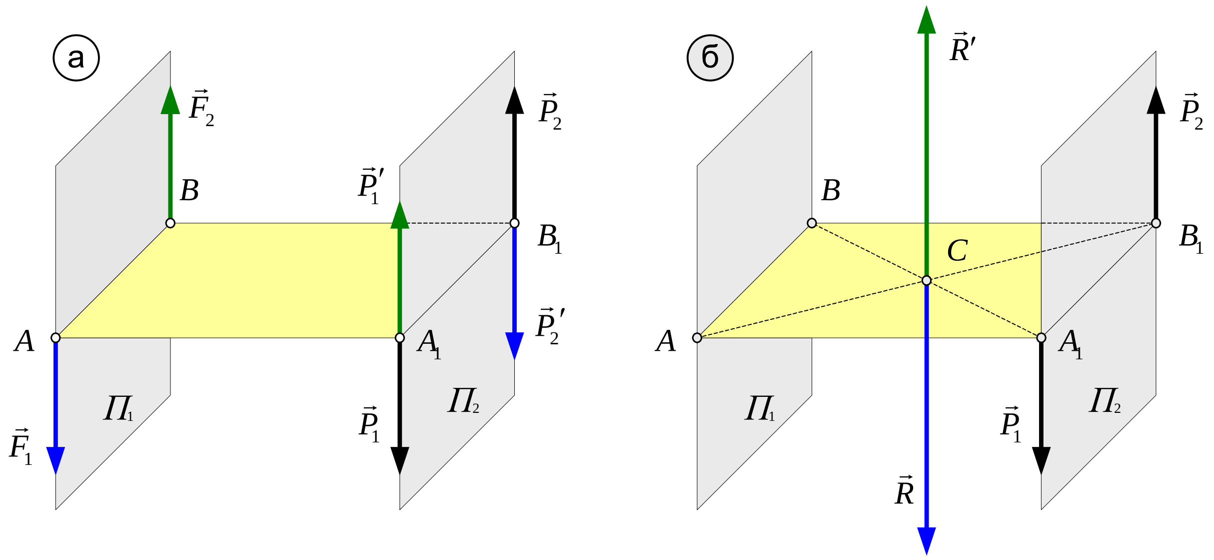


Рис. 6.8.

- Оставшиеся две силы образуют пару сил $(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$, которая эквивалентна заданной паре $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ и имеет тот же момент, но расположена в параллельной плоскости.

Все три утверждения доказаны:
ни величина модуля силы, ни размер плеча, ни направление сил пары значения не имеют. Существенной характеристикой пары является только ее момент. Доказанные утверждения, позволяют преобразовывать и переносить пару, сохраняя при этом вектор ее момента неизменным.

ВЫВОД:

момент пары — вектор свободный. Он не связан с какой-либо точкой или линией действия и может быть перенесен параллельно в любую точку тела.

6.5. СЛОЖЕНИЕ ПАР

Приведенная ниже теорема говорит о том, как складывать пары сил, т. е. как найти одну пару, эквивалентную системе пар.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ПАР

Система пар с моментами $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$ эквивалентна одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов этих пар:

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i \qquad (6.5)$$

Доказательство

Докажем, прежде всего, приведенную теорему для двух пар, поскольку дальше это доказательство легко распространяется на любое число пар.

Пусть имеются две пары: пара $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ и пара $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, расположенные в плоскостях Π_1 и Π_2 (рис. 6.9), образующих произвольный угол φ, и имеющие моменты $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$ соответственно.

Произведем следующие преобразования.

Сохраняя значения моментов, изменим величины сил и плечи следующим образом: пусть модули всех четырех сил будут равны F, и тогда плечи пар станут равны $h_1 = \frac{m_1}{F}$ и $h_2 = \frac{m_2}{F}$.

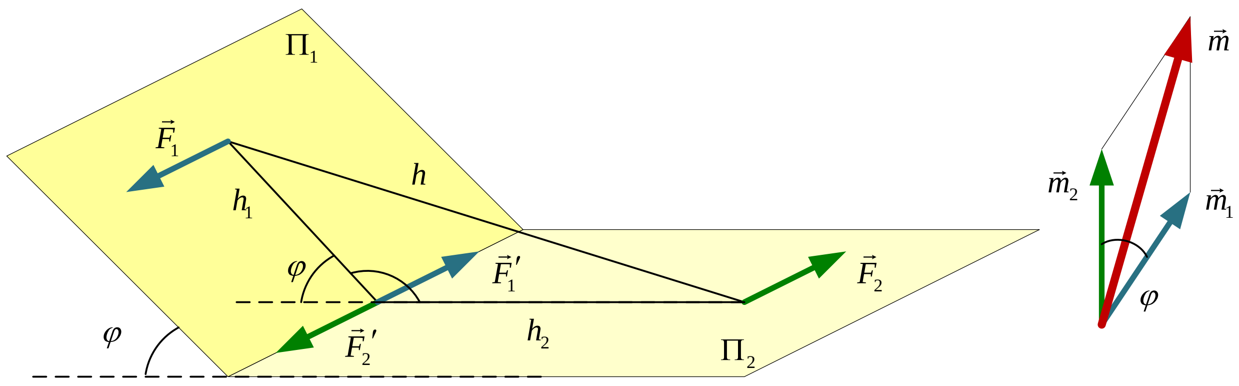


Рис. 6.9.

Переместим эти пары в плоскостях так, чтобы силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ были направлены противоположно друг другу по линии пересечения плоскостей.

Тогда уравновешенную систему сил $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ можно исключить.

Система двух пар действительно оказалась эквивалентной одной паре из сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ с плечом h.

Осталось показать, что момент этой пары равен векторной сумме моментов исходных пар, модули которых $m_1 = Fh_1$ и $m_2 = Fh_2$, а их векторы направлены перпендикулярно плоскостям Π_1 и Π_2.

Вычислим момент пары $\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$:

$$m = Fh = F\sqrt{h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 \cdot \cos\varphi}$$

То есть, для двух пар сложение моментов выполняется по правилу параллелограмма.

Теорема доказана.

Таким образом, моменты двух пар складываются аналогично тому, как складываются силы: по правилу параллелограмма или треугольника моментов.

Для нескольких пар сложение выполняется по правилу **многоугольника моментов**, которое аналогично правилу силового многоугольника.

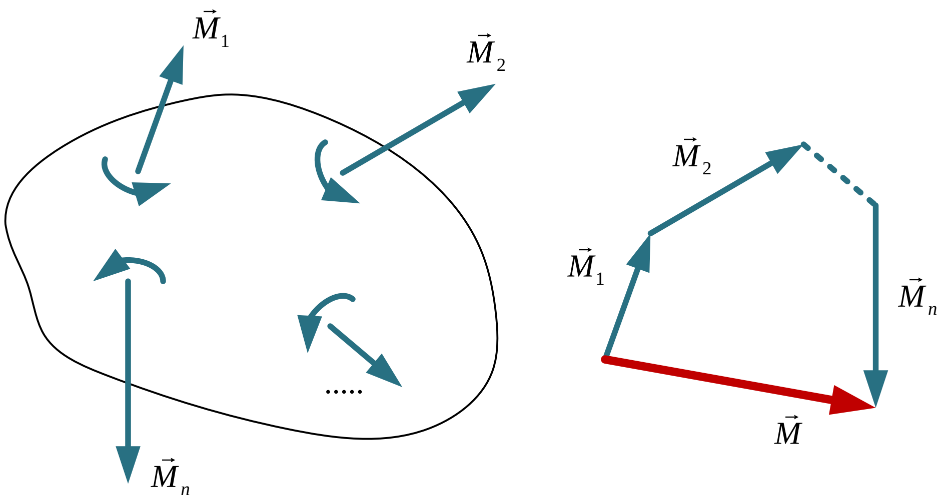


Рис. 6.10

Сумма моментов будет замыкающей стороной этого многоугольника (рис. 6.10). Пара, заменяющая собой систему пар называется обычно **результирующей парой.**

6.6. УСЛОВИЕ УРАВНОВЕШЕННОСТИ СИСТЕМЫ ПАР

Пара сил, как известно, не является уравновешенной системой сил. Поэтому для уравновешенности системы пар требуется, чтобы результирующей пары она не имела. Отсюда следуют условия уравновешенности системы пар.

Для того чтобы система пар была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

1. В векторной форме:
векторная сумма моментов всех пар должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = 0 \qquad (6.6)$$

2. В геометрической форме:
многоугольник моментов пар должен быть замкнут.

3. В аналитической форме:
сумма проекций моментов пар на каждую из координатных осей должна быть равна нулю:

$$\begin{cases} \sum m_{ix} = 0, \\ \sum m_{iy} = 0, \\ \sum m_{iz} = 0. \end{cases} \qquad (6.7)$$

6.7. МОМЕНТЫ ПАР, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Если пары расположены в одной плоскости (рис.6.11), то их вектор-моменты направлены перпендикулярно к этой плоскости.

Знаки моментов, определяемые по правилу правого винта, совпадают со знаками проекций вектор-моментов пар на ось z.

В этом случае моменты пар отличаются только модулем и знаком, и могут тоже рассматриваться как скалярные величины.

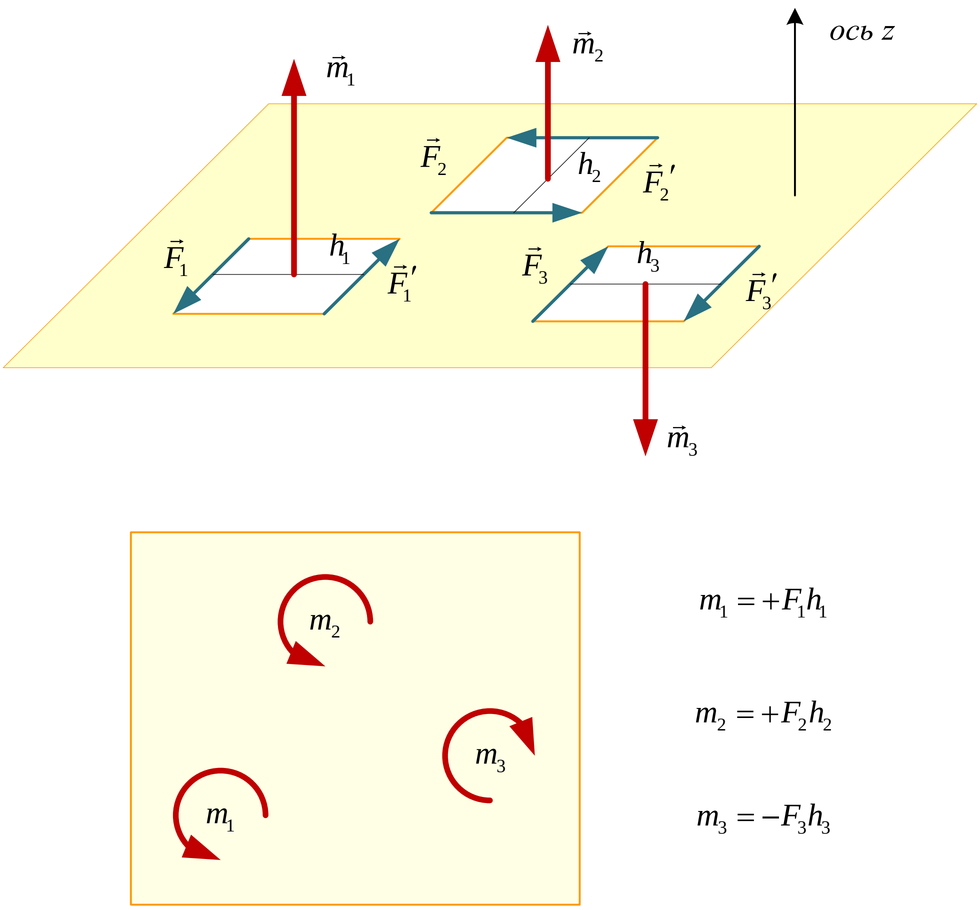


Рис. 6.11

Для плоской системы сил введем понятие алгебраического момента пары.

Алгебраическим моментом пары называется взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары:

$$m\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) = \pm Fd.$$

Алгебраический момент пары не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия и может быть равен нулю, только если линии действия сил пары совпадают.

При решении плоских задач пара изображается скобкой, стрелка которой указывает направление вращения пары, поскольку направление сил пары, ее плечо и место расположения не существенны, − они могут меняться произвольно, если при этом не меняется момент пары.

Сложение пар сил, лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях, является частным случаем сложения пар: в этом случае векторное сложение можно заменить алгебраическим сложением.

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = F_1 h_1 + F_2 h_2 - F_3 h_3 .$$

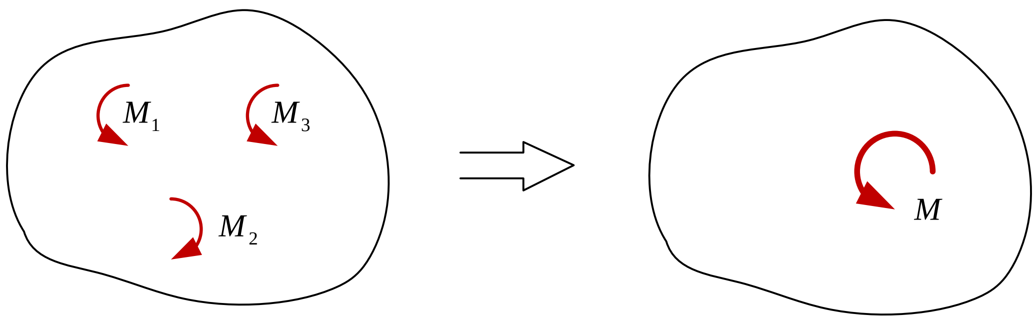


Рис.6.12

Если пары лежат в одной плоскости, то путем суммирования их можно заменить одной эквивалентной парой, момент которой назовем результирующим алгебраическим моментом системы пар.

Результирующий алгебраический момент системы пар, расположенных в одной плоскости, равен сумме алгебраических моментов составляющих пар:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Система пар находится в равновесии только в том случае, когда результирующий момент равен нулю.

Таким образом,

для равновесия пар сил, действующих на твердое тело в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма алгебраических моментов этих пар была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 0.$$

Тема 7.

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

7.1. ЛЕММА ПУАНСО О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИЛЫ

Рассмотрим теперь самый общий случай — систему, состоящую из любого количества сил, как угодно расположенных в пространстве.

Для краткости будем называть такую систему **произвольной пространственной системой сил**.

Прежде чем перейти к ее преобразованию, приведем вспомогательную теорему (лемму Пуансо) о параллельном переносе силы.

Луи Пуансо (Louis Poinsot, 1777-1859) — французский математик и механик, автор геометрической статики (1803). Ввел в механику понятия момента силы, пары сил, разработал теорию пар и метод приведения системы сил. Многое сделал в кинематике и динамике.

Пусть дана сила $\vec{F}$, приложенная в точке A (рис. 7.1а).

Приложим к точке O две силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$ равные по величине и противоположно направленные ($\vec{P} = -\vec{F}'$), что допускается в соответствии со 2-й аксиомой, поскольку $\left(\vec{F}', \vec{F}''\right) \equiv 0$.

Перенос силы в пространстве

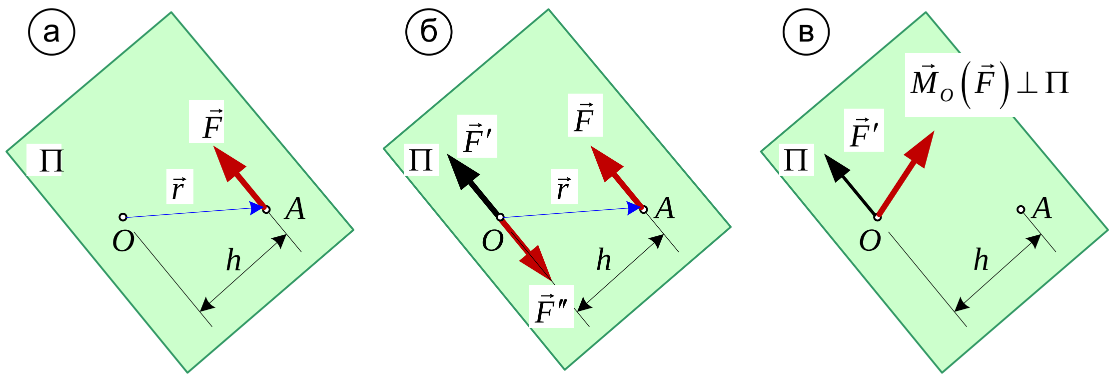


Рис. 7.1

Пусть по величине они будут равны силе $\vec{F}$ и параллельны ей (рис. 7.1).

Полученная система сил представляет собой силу $\vec{F}'$, геометрически равную силе $\vec{F}$, приложенную в центре приведения O и пару сил $\vec{F}''$ и $\vec{F}$, момент которой равен $\vec{m}\left(\vec{F}, \vec{F}''\right) = \vec{r} \times \vec{F}$.

Поскольку выполненные преобразования эквивалентны, то

$$\left(\vec{F}\right) \equiv \left(\vec{F}, \left(\vec{F}', \vec{F}''\right)\right) \equiv \left(\vec{F}', \vec{m}\left(\vec{F}, \vec{F}''\right)\right).$$

Добавляемая пара сил называется **присоединенной парой**.
Момент присоединенной пары, получаемой при приведении силы $\bar{F}$ к центру O, равен моменту данной силы $\bar{F}$ относительно выбранного центра O, то есть

$$\vec{m}\left(\vec{F}, \vec{F}''\right) = \vec{M}_0\left(\vec{F}\right).$$

Доказана ЛЕММА ПУАНСО:

силу $\vec{F}$ можно переносить на параллельную линию действия, добавляя при этом присоединенную пару, момент которой равен моменту силы относительно новой точки приложения силы.

Операция переноса силы в данную точку называется приведением силы к данному центру приведения.

7.2. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ МЕТОДОМ ПУАНСО

Если рассматривается система сил, то все силы (пользуясь леммой Пуансо) можно привести к некоторому центру. В результате этого исходная система сил упростится.

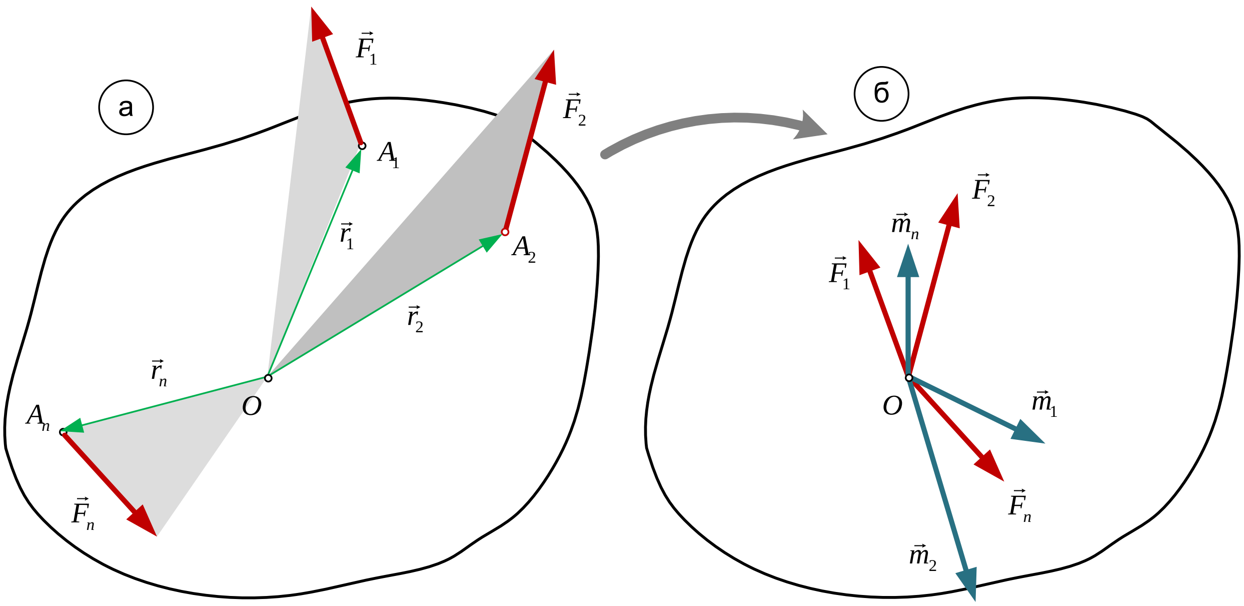


Рис. 7.2

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ (теорема Пуансо)

Любая система сил при приведении к произвольному центру заменяется одной силой и одной парой.

При этом сила равна главному вектору системы сил и приложена в центре приведения, а пара имеет момент, равный главному моменту системы сил относительно центра приведения.

Доказательство

Рассмотрим произвольную систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, (рис. 7.2., а).

Следуя методу Пуансо, каждую силу системы $\vec{F}_i$ приведем к центру О, добавляя (рис. 7.2, б) при каждом переносе присоединенную пару с моментом $\vec{m}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, который равен моменту данной силы относительно точки О:

$$\vec{m}_i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$$

Образовавшуюся в точке О систему сходящихся сил (рис. 7.3) заменим одной силой, которая равна главному вектору системы:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (7.1)$$

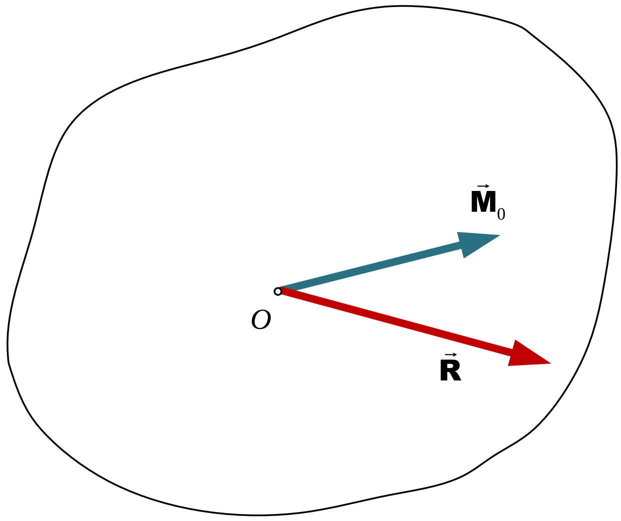


Рис. 7.3

Систему присоединенных пар заменим одной парой (рис. 7.3), момент которой равен сумме моментов присоединенных пар $\vec{m}_i$ и следовательно, равен главному моменту системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{\mathbf{M}}_O. \qquad (7.2)$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ:

две системы сил, имеющие одинаковые главные векторы и одинаковые главные моменты относительно одного и того же центра, эквивалентны друг другу.

7.3. УСЛОВИЯ УРАВНОВЕШЕННОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Сформулируем теперь условия, при которых произвольная пространственная система сил будет уравновешенной.

Система сил в общем случае заменяется одной силой и одной парой, но сила и пара не могут уравновесить друг друга.

Следовательно, для уравновешенности системы сил требуется, чтобы не было ни силы, ни пары.

Отсюда получаются приведенные ниже в трех формах условия уравновешенности произвольной пространственной системы сил.

Для того чтобы произвольная пространственная система сил была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. **<u>В векторной форме:</u>**

   главный вектор системы сил и главный момент системы сил относительно некоторой точки должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{R}} = 0, \\ \vec{\mathbf{M}}_O = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \qquad (7.3)$$

2. **<u>В геометрической форме:</u>**

   силовой многоугольник и многоугольник моментов должны быть замкнуты.

3. **<u>В аналитической форме:</u>**

   суммы проекций сил на каждую из координатных осей и суммы моментов сил относительно каждой из координатных осей должны быть равны нулю:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\mathbf{R}_x=0,\\ \mathbf{R}_y=0,\\ \mathbf{R}_z=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\mathbf{M}_x=0,\\ \mathbf{M}_y=0,\\ \mathbf{M}_z=0,\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iz}=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n}M_x\left(\vec{F}_i\right)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}M_y\left(\vec{F}_i\right)=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_i\right)=0.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad (7.4)$$

Таким образом, в статике для произвольной пространственной системы сил в общем случае можно составить шесть уравнений равновесия.

7.4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СИСТЕМ СИЛ

В частных случаях, когда на систему сил наложены какие-либо ограничения, число необходимых уравнений равновесия может быть меньше шести, поскольку часть из них будут являться тождествами вида.

Рассмотрим примеры.

Сходящаяся система сил

Если линии действия всех сил системы проходят через одну точку, то моменты сил относительно этой точки (или любой проходящей через нее оси) будут равны нулю.

В этом случае уравнения моментов оказываются тождествами (т. е. выполняются автоматически); тогда для системы сходящихся сил остаются только уравнения проекций сил, которые нами записаны как уравнения (4.6):

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iz}=0\end{array}\right.$$

Система пар сил

Если система сил состоит только из пар, для каждой из которых, как известно, сумма векторов сил равна нулю, то уравнения проекций сил оказываются тождествами.

Тогда для системы пар остаются только уравнения сумм проекций моментов пар, которые были записаны нами как уравнения (6.7):

$$\begin{cases} \sum m_{ix} = 0, \\ \sum m_{iy} = 0, \\ \sum m_{iz} = 0. \end{cases}$$

Система параллельных сил

Пусть линии действия всех сил параллельны друг другу (рис. 7.4). Направим ось z параллельно этим силам. В этом случае являются тождествами уравнения проекций сил на оси x и y, а также уравнения моментов сил относительно оси z.

Тогда остаются три уравнения:

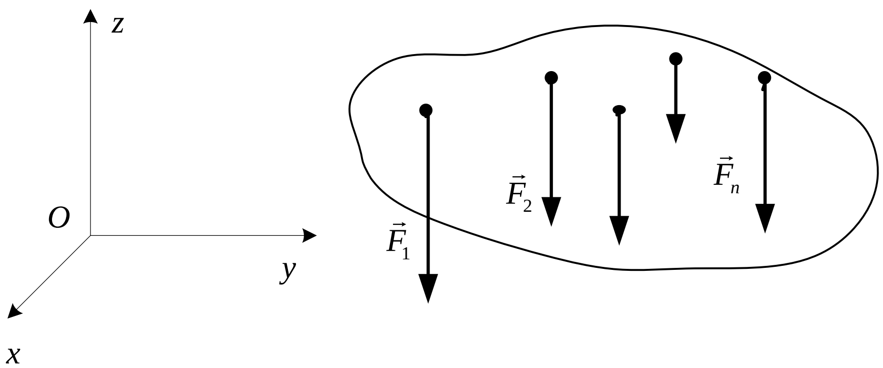


Рис. 7.4

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) = 0, \end{cases} \tag{7.5}$$

которые называются **уравнениями равновесия пространственной системы параллельных сил**.

7.5. ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Пьер Вариньон (1664-1722) — французский математик и механик. Один из основателей геометрической статики. Вариньон впервые дал общее решение задачи сложения параллельных сил, ввел силовой многоугольник и установил свойство силы как скользящего вектора.

ТЕОРЕМА

Момент равнодействующей системы сил относительно любой точки или оси равен сумме моментов всех сил системы относительно этой точки или оси.

Доказательство

Пусть некоторая система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ (система I) имеет равнодействующую $\vec{R}$, приложенную в точке O (система II). Очевидно, что системы I и II эквивалентны: $\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... , \vec{F}_n)$.

Рассмотрим любую точку пространства — точку А.

I. приведем исходную систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, к точке A.

Система приводится к одной силе, равной главному вектору, и паре с моментом, равным главному моменту системы сил относительно точки A:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i).$$

II. приведем силу $\vec{R}$ к точке A.

Система приводится к одной силе, равной главному вектору, и паре с моментом равным моменту равнодействующей относительно центра приведения:

$$\vec{M}_A(\vec{R}).$$

Сравнивая результаты приведения систем I и II, мы видим, что силы в них одинаковы и приложены в одной и той же точке А.

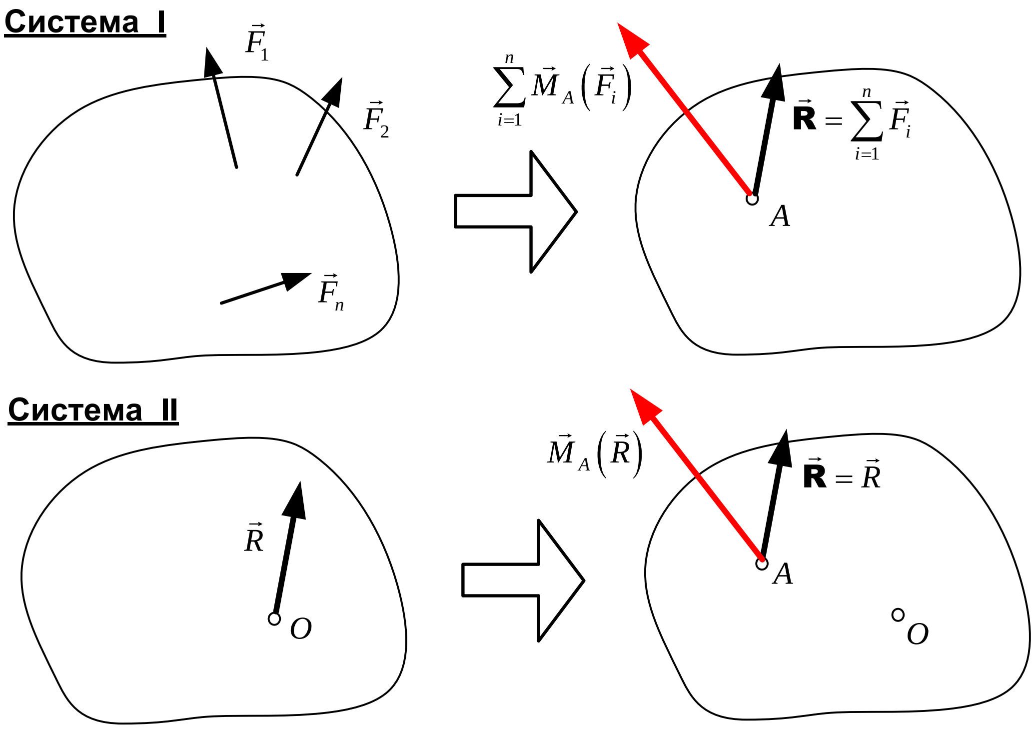


Рис. 7.5

Поскольку после приведения к центру А эти системы сил останутся эквивалентными, моменты пар также должны быть одинаковы, то есть

$$\vec{M}_A(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i). \tag{7.6}$$

Это и есть математическая запись теоремы Вариньона.

Проектируя равенство (7.6) на оси координат, проходящие через точку А, мы получим выражение теоремы Вариньона для моментов сил относительно осей:

$$\begin{cases} M_x\left(\vec{R}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right), \\ M_y\left(\vec{R}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right), \\ M_z\left(\vec{R}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right). \end{cases} \tag{7.7}$$

Эта теорема часто используется на практике для вычисления момента некоторой силы в том случае, когда сложно найти плечо самой силы, но легко определить плечи ее составляющих.

ПРИМЕР

Вычислить момент силы $\vec{F}$, лежащей в плоскости Oxy, относительно оси z (рис. 7.6), учитывая координаты точки приложения силы a и b и угол α.

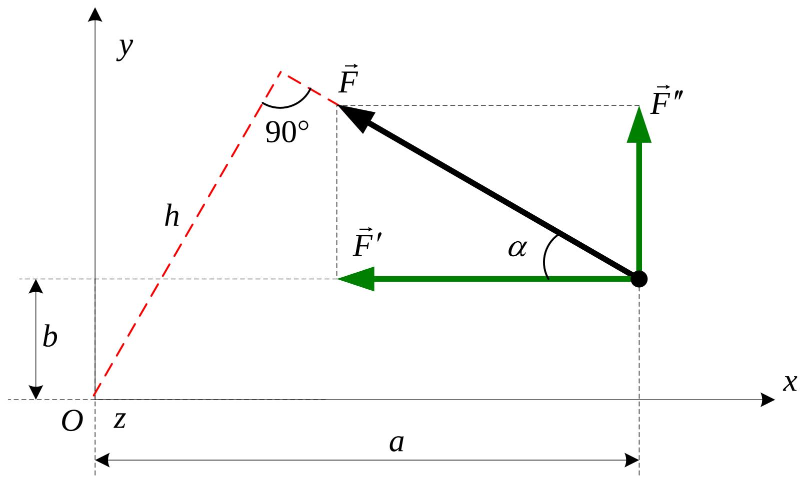


Рис. 7.6

Решение

Разложим силу $\vec{F}$ на составляющие по осям: $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, где $F'=F\cdot\cos\alpha$ и $F''=F\cdot\sin\alpha$. Согласно теореме Вариньона получаем:

$$M_z\left(\vec{F}\right)=M_z\left(\vec{F}'\right)+M_z\left(\vec{F}''\right)$$

или $$M_z\left(\vec{F}\right)=F'b+F''a=F(b\cdot\cos\alpha+a\cdot\sin\alpha).$$

Выражение в скобках – есть плечо h силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Ответ: $M_z\left(\vec{F}\right)=F(b\cdot\cos\alpha+a\cdot\sin\alpha).$

7.6. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ СИЛ

Первым (векторным) инвариантом системы сил является главный вектор. Его величина и направление не зависит от точки приведения.
В отличие от главного вектора главный момент не является инвариантом.
При переносе центра приведения из точки О в точку А его величина меняется по закону

$$\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{r}_0 \times \vec{\mathbf{R}}.,$$

где $\vec{r}_0$ − радиус-вектор, проведенный от нового центра В к точке А.
Можно доказать, что при перемене центра не изменяется скалярное произведение главного момента на направление главного вектора.
Действительно,

$$\vec{\mathbf{M}}_B \cdot \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_A \cdot \vec{\mathbf{R}} + \left(\vec{r}_0 \times \vec{\mathbf{R}}\right) \cdot \vec{\mathbf{R}}.$$

Второе слагаемое в правой части равно нулю, поскольку является скалярным произведением взаимно перпендикулярных векторов.
Следовательно $\vec{\mathbf{M}}_B \cdot \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_A \cdot \vec{\mathbf{R}}$, что и требовалось доказать.
Модуль главного вектора не зависит от точки приведения. Поделив на него левую и правую части равенства получим:

$$\vec{\mathbf{M}}_B \cdot \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_A \cdot \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}}$$

или $\vec{\mathbf{M}}_B \cdot \vec{e}_R = \vec{\mathbf{M}}_A \cdot \vec{e}_R$

или $\mathbf{M}_B \cos\beta = \mathbf{M}_A \cos\alpha,$

где α и β углы между направлениями главного момента соответственно в точках A и B. Выражения в левой и правой частях представляют собой проекции главного момента на направление главного вектора.
Величина этой проекции не зависит от выбора центра приведения.

Итак, каждая система сил имеет две не зависящие от центра приведения характеристики:

1. **главный вектор $\vec{\mathbf{R}}$ - <u>векторный инвариант,</u>**
2. **проекцию главного момента на направление главного вектора - <u>скалярный инвариант</u>.**

Первый и второй инварианты независимы, то есть из одного из них не следует другой.

Пусть известны аналитические выражения для главного вектора и главного момента относительно некоторого центра O:

$$\vec{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_x\vec{i} + \mathbf{R}_y\vec{j} + \mathbf{R}_z\vec{k}, \qquad \vec{\mathbf{M}}_O = \mathbf{M}_{Ox}\vec{i} + \mathbf{M}_{Oy}\vec{j} + \mathbf{M}_{Oz}\vec{k},$$

где $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ − проекции векторов на координатные оси.

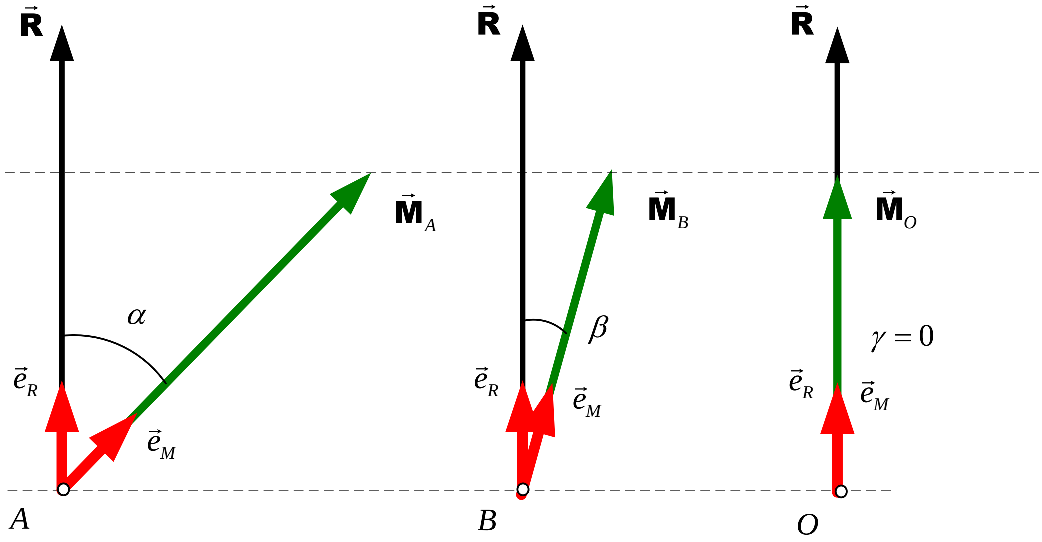


Рис. 7.7

Направляющие вектора (вектора единичной длины) для главного вектора и главного момента $\vec{e}_R$ и $\vec{e}_M$ (рис. 7.8)., получаются делением векторов $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ на их модули:

$$\vec{e}_R = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\mathbf{R}} = \frac{1}{\mathbf{R}}\left(\mathbf{R}_x\vec{i} + \mathbf{R}_y\vec{j} + \mathbf{R}_z\vec{k}\right) = n_x \cdot \vec{i} + n_y \cdot \vec{j} + n_z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{e}_M = \frac{\vec{\mathbf{M}}_0}{\mathbf{M}_0} = \frac{1}{\mathbf{M}_0}\left(\mathbf{M}_{Ox}\vec{i} + \mathbf{M}_{Oy}\vec{j} + \mathbf{M}_{Oz}\vec{k}\right) = l_x \cdot \vec{i} + l_y \cdot \vec{j} + l_z \cdot \vec{k},$$ где

$n_x, n_y, n_z,$ – направляюшие косинусы главного вектора, а

l_x, l_y, l_z – направляюшие косинусы главного момента.

Выразим проекцию главного момента $\vec{\mathbf{M}}_O$ на направление главного вектора:

$$\vec{\mathbf{M}}_O \cdot \vec{e}_R = \mathbf{M}_{Ox} n_x + \mathbf{M}_{Oy} n_y + \mathbf{M}_{Oz} n_z \tag{7.8}$$

Это есть аналитическое выражение для второго инварианта системы сил. Косинус угла меду главным вектором и главным моментом равен скалярному произведению направляющих векторов:

$$\cos\alpha = \vec{e}_M \cdot \vec{e}_R = n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z \tag{7.9}$$

7.7. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Согласно основной теореме статики, любая система сил заменяется

- одной силой (равной главному вектору системы сил $\vec{\mathbf{R}}$ и приложенной в центре приведения О) и/или

- одной парой (с моментом, равным главному моменту системы сил относительно центра приведения $\vec{\mathbf{M}}_O$).

Однако в ряде случаев и эту систему сил можно упростить.
Рассмотрим эти случаи.

1. Если $\mathbf{R}=0$ и $\mathbf{M}_O=0$, то система сил уравновешена.

2. Если $\mathbf{R}=0$ и $\mathbf{M}_O\neq 0$, то система сил эквивалентна одной паре сил.

3. Если $\mathbf{R}\neq 0$ и $\mathbf{M}_O=0$, то система сил эквивалентна одной силе, т. е. имеет равнодействующую, которая проходит через центр приведения О.

4. Если $\mathbf{R}\neq 0$ и $\mathbf{M}_O\neq 0$ (имеются и сила и пара), то дальнейшее упрощение системы зависит от взаимного расположения векторов $\vec{\mathbf{R}}$ и $\vec{\mathbf{M}}_O$.

4.1. **Векторы $\vec{\mathbf{R}}$ и $\vec{\mathbf{M}}_O$ взаимно перпендикулярны ($\cos\alpha=0$)** (рис. 7.8, а).

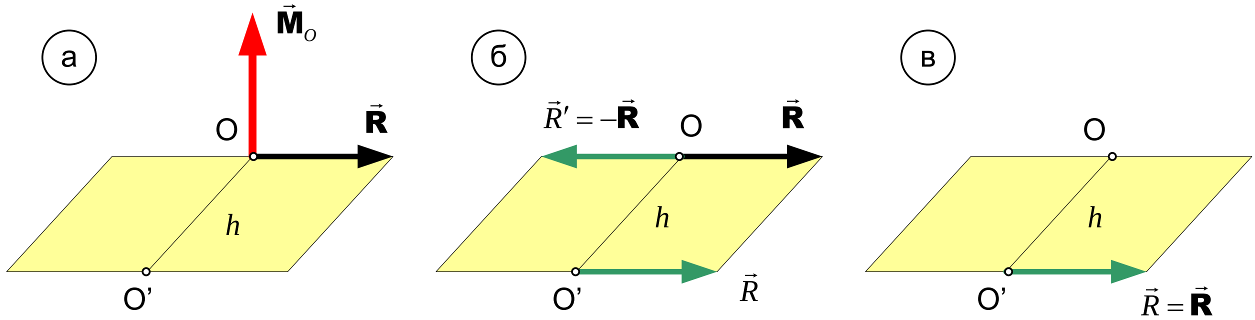


Рис. 7.8

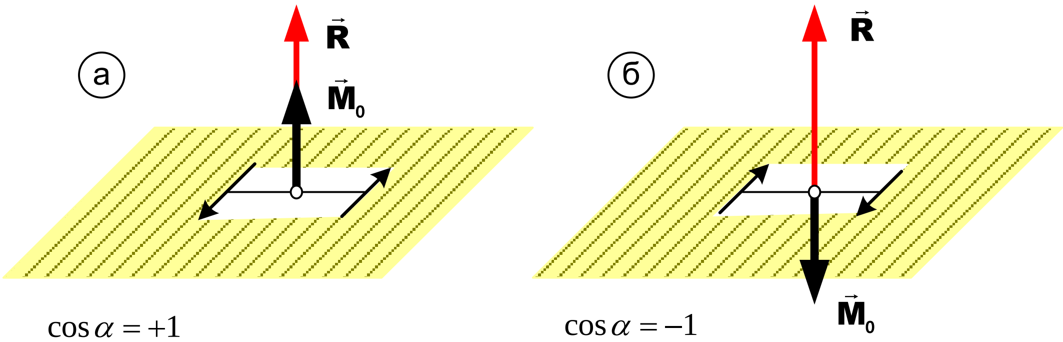
Тогда сила оказывается параллельной плоскости действия пары.
Учитывая возможность преобразования пары сил при сохранении его момента, сделаем следующее:

1) перенесем пару на параллельную плоскость, содержащую линию действия силы;
2) расположим пару так, чтобы одна из ее сил ($\vec{R}'$) была приложена в точке О и направлена против силы $\vec{\mathbf{R}}$ (рис. 7.8, б);
3) сделаем модули сил, составляющих пару, равными модулю силы $\vec{\mathbf{R}}$: $R=R'=\mathbf{R}$, при этом плечо пары будет равно $h=\mathbf{M}_0/\mathbf{R}$.

Тогда уравновешенную систему сил $\vec{R}'$ и $\vec{\mathbf{R}}$ можно исключить. Исходная система сил оказывается эквивалентной одной силе $\vec{R}$ (рис. 7.8, в); , т. е. имеет равнодействующую (равную главному вектору).

4.2. Векторы $\vec{\mathbf{R}}$ и $\vec{\mathbf{M}}_O$ параллельны

($\cos\alpha = +1$ (рис. 7.9, а); или $\cos\alpha = -1$(рис. 7.9, б)).



$\cos\alpha = +1$ (*проекция положительна*)

$\cos\alpha = -1$ (*проекция отрицательна*)

Рис. 7.9

В этом случае пара сил действует в плоскости, перпендикулярной силе $\vec{R}$. Такая система сил не может быть более упрощена.

Она называется **динамой** (**динамическим или силовым винтом**).

Линия, на которой располагаются в этом случае вектора $\vec{R}$ и $\vec{M}_0$ называется **центральной или главной осью системы сил**.

Динамические винты образуют, например, те силы, которые действуют при закручивании или выкручивании шурупов.

4.3. Векторы $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ не перпендикулярны и не параллельны

($\cos\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq +1$, $\cos\alpha \neq -1$).

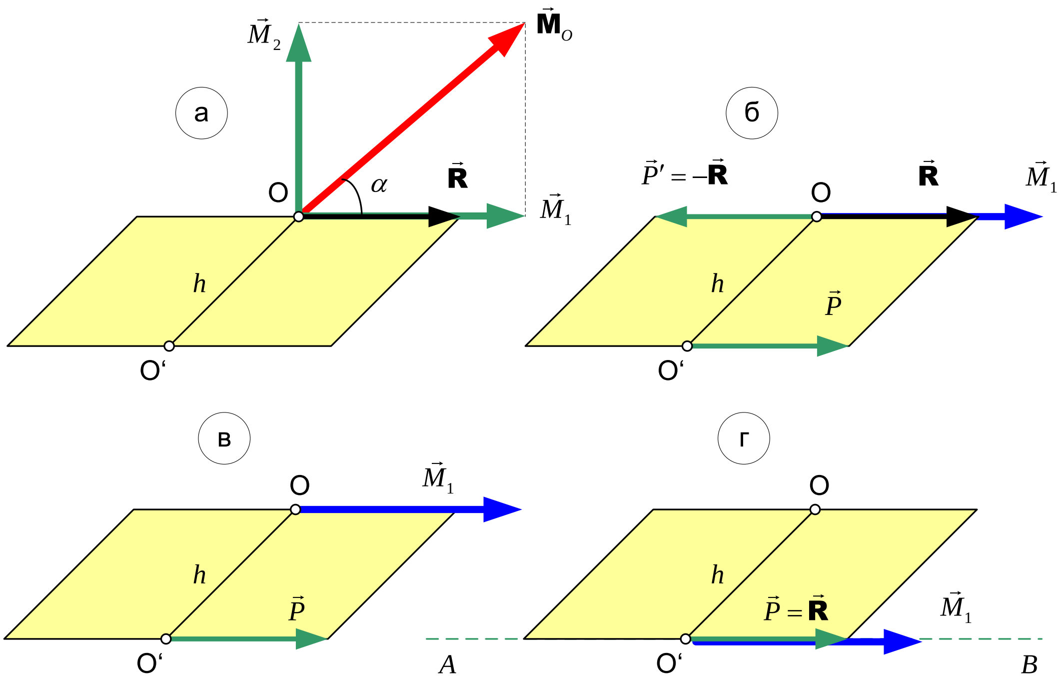


Рис. 7.10

Если векторы $\vec{\mathbf{R}}$ и $\vec{\mathbf{M}}_O$ составляют друг с другом некоторый угол а, отличный от 90°, 0° и 180° (рис. 7.10), то для упрощения этой системы сил можно:

1) Разложить момент $\vec{\mathbf{M}}_O$ на два составляющих момента: $\vec{M}_1$ — направленный по линии действия силы $\vec{\mathbf{R}}$, и $\vec{M}_2$ — перпендикулярный к этой линии (рис. 7.10, а);
2) Пару с моментом $\vec{M}_2$ представим силами $\vec{P}' = -\vec{\mathbf{R}}$ и $\vec{P} = \vec{\mathbf{R}}$ с плечом $h = M_2/\mathbf{R}$ (рис. 7.10, б);
3) Удалим уравновешенные силы $\vec{\mathbf{R}}$ и $\vec{P}' = -\vec{\mathbf{R}}$, приложенные в точке О (рис. 7.10, в);
4) Момент $\vec{M}_1$, как свободный вектор перенесем в точку O'. В результате получаем динаму (рис. 7.10, г), ось которой находится от исходного центра приведения на расстоянии $h = \dfrac{M_2}{\mathbf{R}} = \dfrac{\mathbf{M}_0 \sin\alpha}{\mathbf{R}}$.

Тема 8.

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

8.1. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Рассмотрим случай приведения к заданному центру O сил, произвольно расположенных на плоскости.

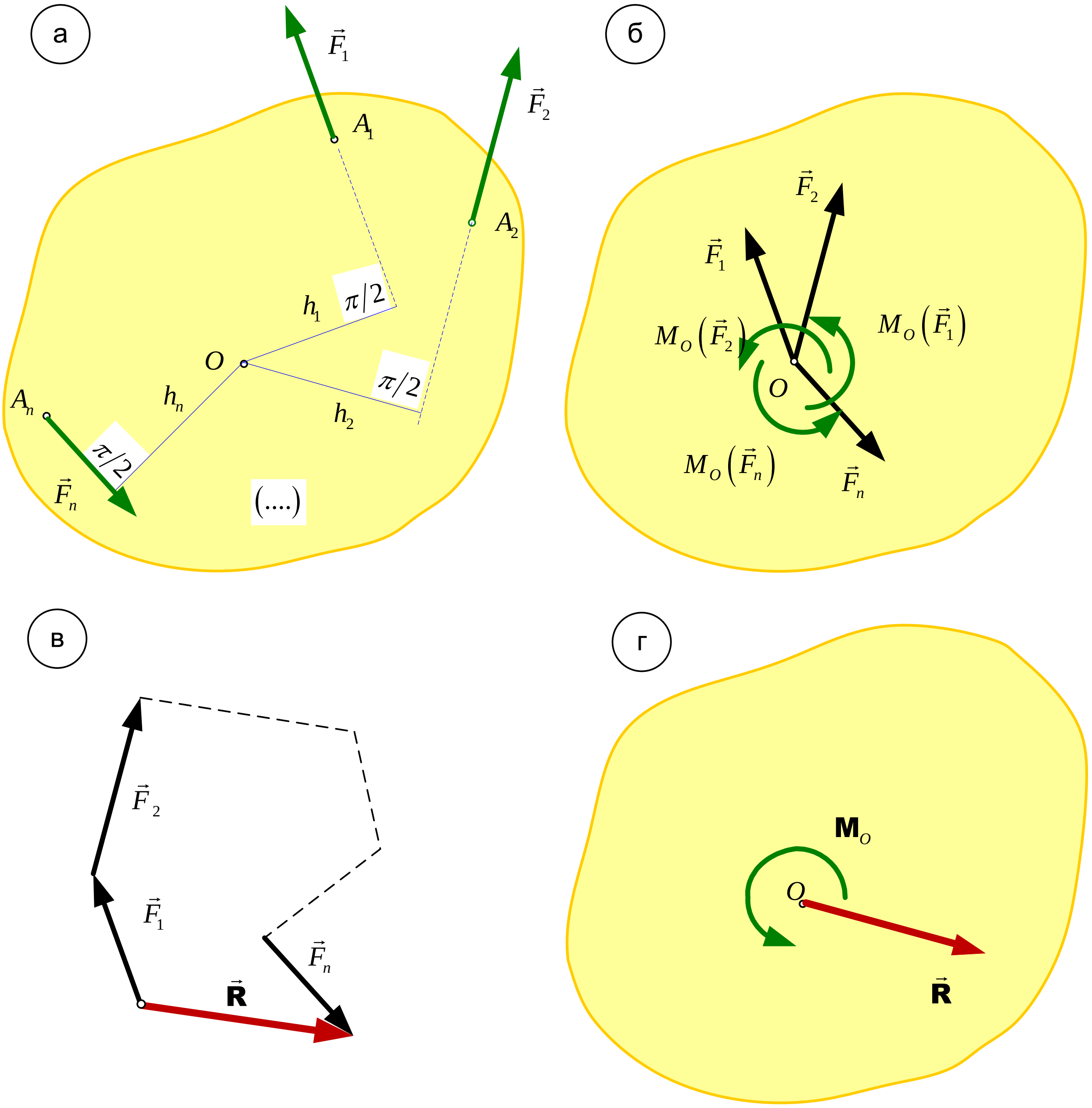


Рис. 8.1

Пусть к твердому телу приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, лежащие в одной плоскости и приложенные соответственно в точках $A_1, A_2, ..., A_n$ (рис. 8.1,а).

Примем за центр приведения некоторую точку O, лежащую в этой плоскости и приведем все силы к этому центру. В результате приведения получим систему сходящихся сил $\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n'$, приложенных в центре O и лежащих в одной плоскости, а также систему присоединенных пар, алгебраические моменты которых равны $m_i\left(\vec{F}_i, \vec{F}_i'\right) = \pm F_i h_i$ (рис. 8.1,б).

Сложив сходящиеся силы, получим главный вектор системы сил $\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i'$, который будет лежать в той же плоскости, что и вся система. Как известно, главный вектор системы представляется замыкающим вектором многоугольника построенного из векторов $\vec{F}_i^*$, геометрически равных силам заданной системы (рис. 8.1,в).

Моменты присоединенных пар равны моментам сил системы относительно центра приведения, то есть

$$m_i\left(\vec{F}_i, \vec{F}_i'\right) = M_O\left(\vec{F}_i\right) = \pm F_i h_i$$

Сложив алгебраические моменты всех сил системы относительно точки O, получим алгебраический главный момент системы сил относительно точки O.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{F}_i, \vec{F}_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = \mathbf{M}_O.$$

Таким образом (рис. 8.1,г),

силы, произвольно расположенные на плоскости, можно привести к одной силе, приложенной в центре приведения, равной главному вектору данной системы сил, и к лежащей в той же плоскости паре сил с алгебраическим моментом, равным главному алгебраическому моменту системы сил относительно центра приведения.

То есть

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv \left(\vec{\mathbf{R}}, \mathbf{M}_O\right).$$

Выбор центра приведения не отражается на модуле и направлении главного вектора, но влияет на величину и знак главного момента.

8.2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ

Итак, любая плоская система сил может быть заменена

- одной силой (равной главному вектору системы сил $\vec{\mathbf{R}}$ и приложенной в центре приведения O) и/или
- одной парой (с алгебраическим моментом, равным главному алгебраическому моменту системы сил относительно центра приведения $\mathbf{M}_O$).

Однако в ряде случаев и эту систему сил можно упростить.
Рассмотрим эти случаи.

1. Если $\mathbf{R}=0$ и $\mathbf{M}_O=0$, то система сил уравновешена (эквивалентна нулю).
2. Если $\mathbf{R}=0$ и $\mathbf{M}_O\neq 0$, то система сил эквивалентна одной паре сил.
3. Если $\mathbf{R}\neq 0$ и $\mathbf{M}_O=0$, то система сил эквивалентна одной силе, т. е. имеет равнодействующую, которая проходит через центр приведения O.
4. Если $\mathbf{R}\neq 0$ и $\mathbf{M}_O\neq 0$ (имеются и сила и пара), то система сил оказывается эквивалентной одной силе $\vec{R}$, т. е. имеет равнодействующую равную главному вектору, которая не проходит через центр приведения O.

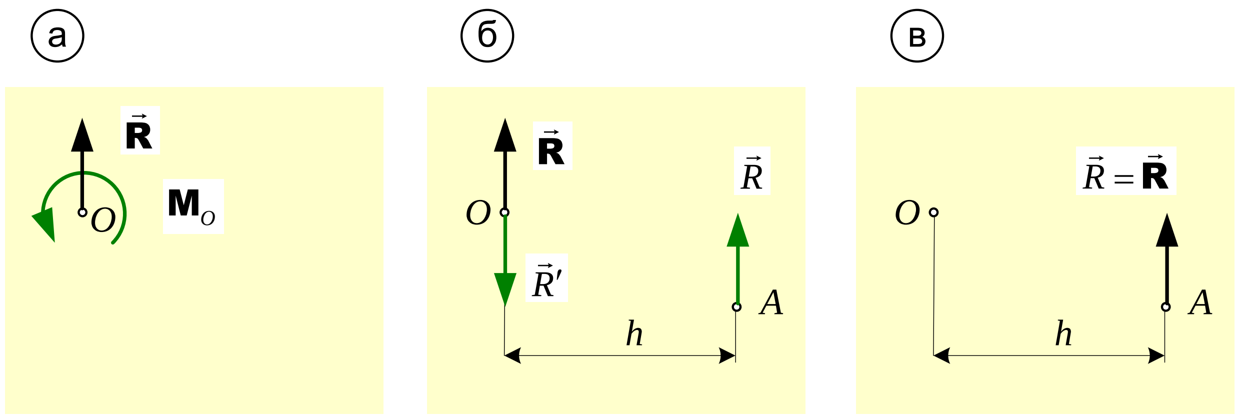


Рис. 8.2

Рассмотрим последний случай (рис. 8.2).
Так как элементы пары можно изменять, сохраняя при этом ее момент, расположим пару $(\vec{R},\vec{R}')$, момент которой равен главному моменту системы сил $\mathbf{M}_O$ следующим образом:

1. пусть одна из сил пары ($\vec{R}'$) будет приложена в точке O и направлена против силы $\vec{\mathbf{R}}$ (рис. 8.2, б);
2. пусть модули сил, составляющих пару, равны модулю главного вектора: $R=R'=\mathbf{R}$, и тогда плечо пары будет равно $h=\mathbf{M}_0/\mathbf{R}$.

Уравновешенную систему сил $\vec{R}'$ и $\vec{\mathbf{R}}$ можно исключить.
Исходная система сил оказывается эквивалентной одной силе $\vec{R}$, т. е. имеет равнодействующую (равную главному вектору), линия действия которой проходит на расстоянии $h=\mathbf{M}_0/\mathbf{R}$ от центра O.

8.3. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Поскольку плоская система сил является частным случаем произвольной пространственной системы сил, для нее справедливы те же условия уравновешенности, что и для пространственной системы.
Остановимся подробнее на записи условий уравновешенности в аналитической форме.

Пусть плоскость (рис. 8.1, а), в которой лежат линии действия сил системы $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$— это плоскость xy. Ось z перпендикулярна этой плоскости.

Рассматривая шесть уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил (7.4), легко видеть, что в данном случае уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} \equiv 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_i\right) \equiv 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_i\right) \equiv 0.$$

превращаются в тождества, так как все силы перпендикулярны оси z и лежат в одной плоскости с осями x и y.

Таким образом, условия уравновешенности плоской системы сил в аналитической форме будут представлены только тремя уравнениями:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение для плоской системы сил принято записывать иначе. Вместо того чтобы говорить о «моментах сил относительно оси z, проходящей через некоторую точку *O*, говорят о «моментах сил относительно точки *O*» (см. § 5.6) и записывают последнее уравнение в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{\hat{\imath}}\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Тогда уравнения равновесия для плоской системы сил принимают вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \qquad (8.1)$$

Это есть первая (основная) форма уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Она состоит из двух уравнений проекций сил на две проведенные произвольным образом перпендикулярные оси x и y и одного уравнения моментов сил относительно произвольной точки O плоскости xy.

Можно показать, что системе уравнений (8.1) равносильны еще две формы записей уравнений равновесия для плоской системы сил.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Это вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил.

Она содержит одно уравнение проекций сил на какую-либо ось y и два уравнения моментов сил относительно точек A и B (ось y не должна быть перпендикулярна линии AB, иначе уравнения не будут независимы).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B\left(\vec{F}_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C\left(\vec{F}_i\right) = 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Это третья форма уравнений равновесия плоской системы сил.

Она содержит три уравнения моментов сил относительно трех произвольных точек *A, B* и *C* (при этом точки *A*, *B* и *C* не должны лежать на одной прямой).
Из трех возможных вариантов следует выбирать ту форму записи уравнений равновесия, с помощью которой данная конкретная задача будет решаться наиболее рациональным образом.

8.4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Часто в задачах статики приходится рассматривать равновесие не одного тела, а системы тел, соединенных друг с другом шарнирно или опирающихся друг на друга, как это показано, например, на рис. 8.3.
Конечно, и в этом случае можно рассмотреть равновесие всей системы в целом, пользуясь принципом отвердевания, и составить три уравнения равновесия (для плоской системы сил).
Однако для системы тел на рис. 8.3, а имеем четыре неизвестных реакции внешних связей (по две в каждой из опор), а для системы тел на рис. 8.3, б – пять реакций (с учетом возникающего в жесткой заделке реактивного момента).
Таким образом, число неизвестных реакций внешних связей превышает число уравнений равновесия всей системы в целом.

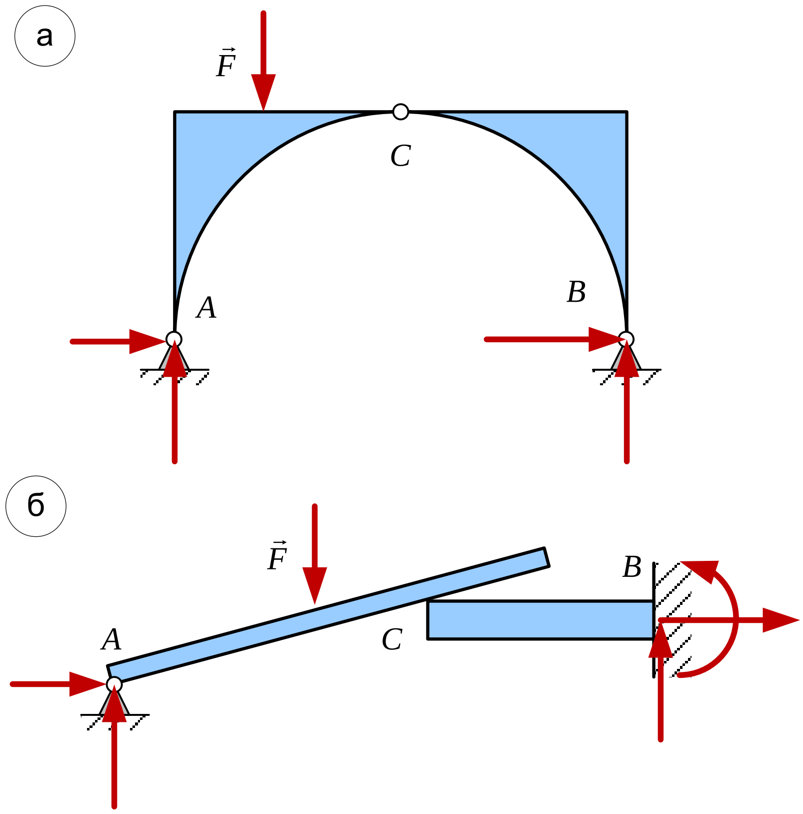


Рис. 8.3

Тем не менее, приведенные механические системы не могут считаться статически неопределимыми, поскольку состоят не из одного тела.

Такие системы можно мысленно разделять на отдельные тела (рис. 8.4), вводить для них реакции связей (с учетом принципа равенства действия и противодействия) и составлять для каждого тела по три уравнения равновесия.

Для каждой из рассмотренных выше систем тел в шести уравнениях равновесия будут присутствовать шесть неизвестных величин, и, следовательно, эти системы статически определимы.

При этом имеются еще три уравнения равновесия всей системы в целом, которые могут быть использованы для проверки полученного решения.

Операция разделения системы на отдельные тела называется обычно **расчленением системы тел**, а силы взаимодействия тел одной системы — **реакциями внутренних связей.**

В тех случаях, когда тела последовательно соединяются друг с другом с помощью шарниров, образуя цепь, количество неизвестных сил, которые придется определять из уравнений равновесия, можно подсчитать по формуле:

$$N = m + 2(n-1),$$

где m − число незвестных опорных реакций, а n − количество геометрически неизменяемых тел (дисков), которые объединены в одну конструкцию.

Число же независимых уравнений равновесия будет равно

$$M = 3n.$$

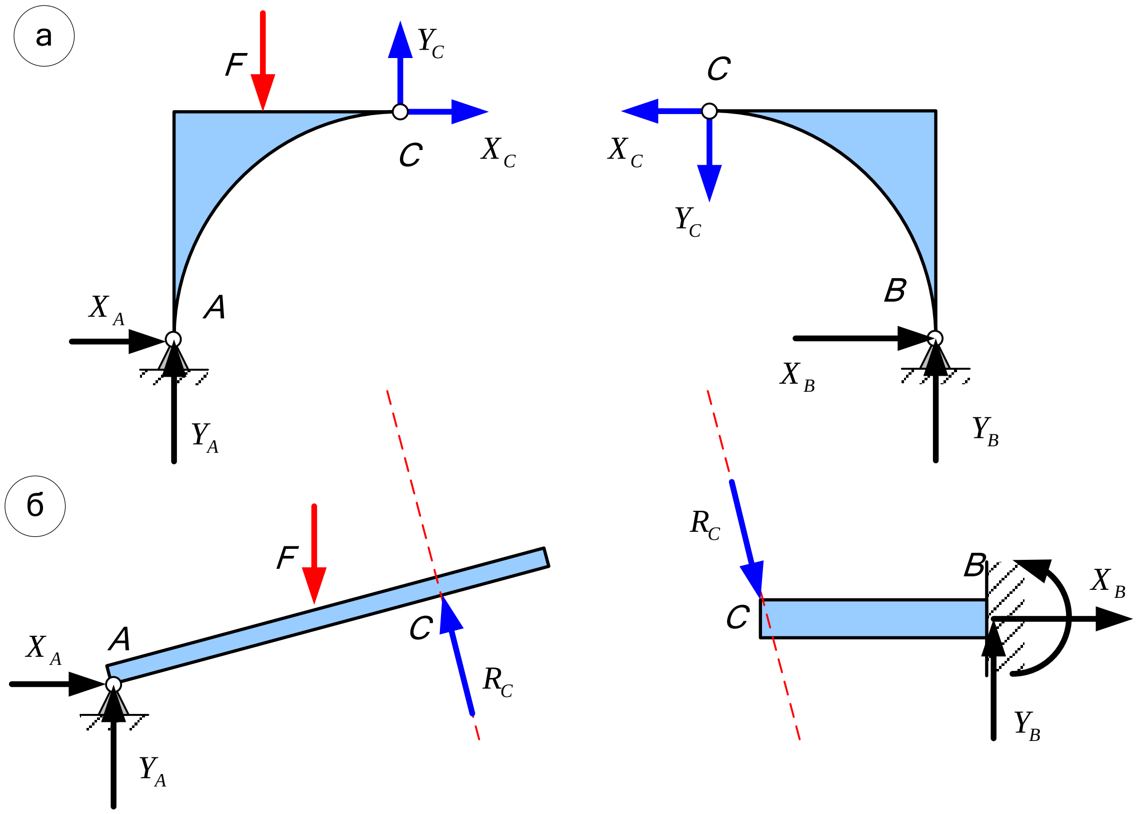


Рис. 8.4

Если выполняется равенство $N = M$ – система статически определима. При $N > M$ уравнений равновесия недостаточно для определения всех неизвестных сил и система является статически неопределимой.

Так для системы, изображенной на рис. 8.5, $N = 5 + 2(3-1) = 9$, а $M = 3 \cdot 3 = 9$, следовательно, она статически определима.

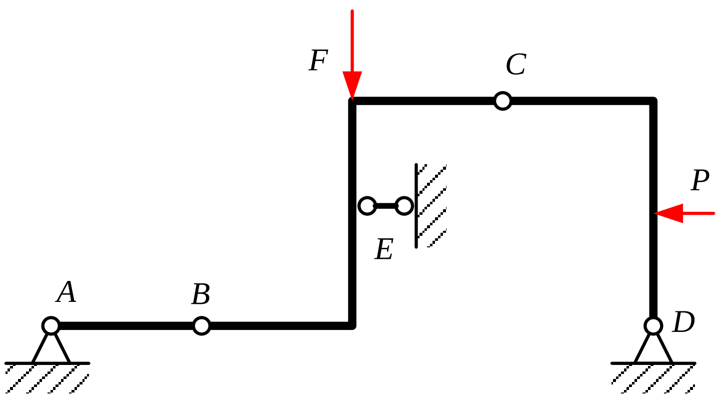


Рис. 8.5

Тема 9.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

9.1. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Рассмотрим систему (рис. 9.1) параллельных и одинаково направленных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу в точках $O_1, O_2, ..., O_n$.
Очевидно, что эта система сил имеет равнодействующую которая имеет то же направление, что и силы системы:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

По модулю она равна $R = \sum_{i=1}^{n} F_i$

Пусть единичный вектор $\vec{e}$ указывает направление сил системы. Тогда силы можно записать в виде

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{e}, \quad \vec{F}_2 = F_2\vec{e}, \quad ..., \quad \vec{F}_n = F_n\vec{e},$$

$$\vec{R} = R \cdot \vec{e}\,.$$

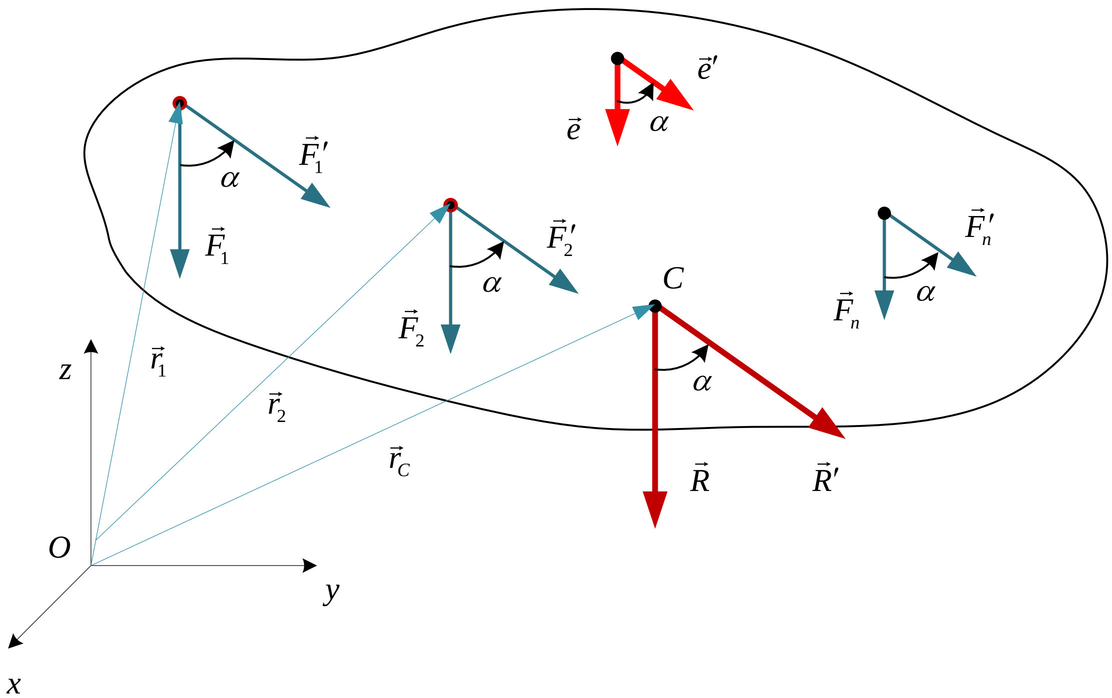


Рис. 9.1

Изменим направление сил системы. Для этого с помощью единичного вектора $\vec{e}'$ укажем новое направление (рис. 9.1).

Тогда все силы системы повернутся на один и тот же угол α и образуется новая система параллельных сил $\vec{F}_1' = F_1\vec{e}',\ \vec{F}_2' = F_2\vec{e}',\ \ldots,\ \vec{F}_n' = F_n\vec{e}',$ с теми же модулями, которая имеет равнодействующую,

$$R' = \sum_{i=1}^{n} F_i = R\,,$$

которая отличается направлением, но имеет тот же модуль.

Такую операцию будем называть **поворотом системы параллельных сил**.

Покажем, что имеется такая точка C, через которую линия действия равнодействующей пройдет при любом направлении сил системы.

Согласно теореме Вариньона, момент равнодействующей системы сил относительно любой точки равен сумме моментов всех сил системы относительно этой точки.

В рассматриваемом случае, например,

$$\vec{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) \qquad \text{или} \qquad \vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$$

где $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ — радиус-векторы точек $O_1, O_2, \ldots, O_n$, проведенные из начала координат (точки O), $\vec{r}_C$ — радиус-вектор точки С.

Выразим в последнем равенстве все векторы сил через единичный вектор, тогда оно примет вид:

$$\vec{r}_C \times R\,\vec{e} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times F_i\,\vec{e}\right) \qquad \text{или} \qquad \left(R\vec{r}_C\right)\times\vec{e} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\vec{r}_i\right)\times\vec{e}$$

Чтобы это равенство выполнялось при любом по направлению единичном векторе $\vec{e}$ должны быть равны сомножители этого вектора в левой и правой частях, т. е.

$$R\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} F_i\vec{r}_i$$

откуда получаем:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\vec{r}_i}{R} \qquad (9.1)$$

Точка *С*, через которую линия действия равнодействующей пройдет при любом повороте системы параллельных сил, называется <u>центром параллельных сил</u>.

Формула (9.1) определяет положение центра параллельных сил через его радиус-вектор.

Координаты центра параллельных сил можно получить, если спроектировать равенство (9.1) на координатные оси:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i F_i}{R}, \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i F_i}{R}, \\ z_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i F_i}{R}. \end{cases} \tag{9.2}$$

Заметим, что формулы (9.1) и (9.2) справедливы и для случая параллельных сил, направленных в разные стороны, если в них полагать величины F_i для сил одно го направления со знаком «плюс», а для сил другого направления со знаком «минус».
При этом, конечно, сумма сил не должна быть равна нулю.

9.2. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Силы притяжения отдельных частиц тела к Земле направлены к центру Земли. Поскольку размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, эти силы можно считать параллельными.
Равнодействующая этих параллельных сил — это сила тяжести (ее модуль — это вес тела), а центр этой системы параллельных сил (в котором всегда приложена сила тяжести) называется центром тяжести тела.
Поворот тела относительно Земли приводит к повороту системы сил относительно самого тела. При этом положение центра тяжести тела не зависит от расположения тела в пространстве.
Если обозначить модули сил тяжести отдельных частей тела $G_1, G_2, ..., G_n$, и вес тела $G = \sum\limits_{i=1}^{n} G_i$, то радиус-вектор и координаты центра тяжести могут быть вычислены по общей формуле

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i}{G}, \tag{9.3}$$

из которой следует, что

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i G_i}{G}, \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i G_i}{G}, \\ z_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i G_i}{G}. \end{cases} \tag{9.4}$$

Если тело однородное, т. е. все его части имеют один и тот же удельный вес $\gamma = g\rho$, где g – ускорение свободного падения, а ρ – удельная плотность, то $G = \gamma V$ и $G_i = \gamma V_i$, где $V = \sum\limits_{i=1}^{n} V_i$ – объем всего тела, а V_i – объем i- й его части. После подстановки этих выражений в формулы (9.4) и сокращения мы получаем соотношения для координат центра тяжести объема:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i V_i}{V}, \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i V_i}{V}, \\ z_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i V_i}{V}. \end{cases} \tag{9.5}$$

Центр тяжести однородной тонкой пластины постоянной толщины (оболочки) — центр тяжести плоской фигуры — может быть вычислен аналогично через площади отдельных ее частей A_i и общую площадь $A = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}, \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}, \\ z_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i A_i}{A}. \end{cases} \tag{9.6}$$

Центр тяжести однородного длинного тонкого тела — центр тяжести линии — определяется через длины его участков L_i и общую длину $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i L_i}{L}, \\ y_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}{L}, \\ z_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i L_i}{L}. \end{cases} \tag{9.7}$$

9.3. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

Использование симметрии

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

а) если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела находится в этой плоскости;

б) если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Отсюда можно сделать выводы о том, что центр тяжести отрезка находится в его середине; центры тяжестей окружности, круга, сферы и шара находятся в их геометрических центрах; центры тяжестей периметра и площади параллелограмма, а также объема параллелепипеда находятся в точке пересечения их диагоналей.

Метод разбиения

Если тело можно разбить на конечное число частей, координаты центров тяжестей которых известны, то для определения положения центра тяжести тела можно пользоваться непосредственно формулами (9.5) - (9.7).

Метод отрицательных весов

Этот метод применяется тогда, когда у тела имеются вырезы (полости).
В этом случае также можно пользоваться формулами (9.5)-(9.7), но вырезанную часть рассматривать как дополнительную, а ее вес (объем, площадь, длину) брать со знаком «минус».
Формулы для координат центров тяжести различных объемов и фигур можно найти в справочниках.
Следует иметь в виду, что в случае непрерывного распределения массы в формулах (9.5) - (9.7) суммы заменяются соответствующими интегралами.

Например, для координат центра тяжести объема можно получить:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V x dv, \\ y_C = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V y dv, \\ z_C = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V z dv. \end{cases}$$

где dv − бесконечно малый элемент объема, а x, y, z − его координаты.