**Тема : Розв'язування СЛР методом Гаусса та Крамера.**

**План**

1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**
3. **Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.**
4. **Зразок оформлення ІДЗ.**

## 1.Теоретичні відомості

**Метод Крамера**

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

**Означення.** Визначник $\Delta$, складений з коефіцієнтів при невідомих системи (1), називається *головним визначником системи*.

При розв'язуванні системи (1) можуть виникнути три суттєво різні випадки.

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система (1) має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad (2)$$

2) Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників$\Delta_i, i = \overline{1,3}$, відмінний від нуля, то система несумісна.

3) Якщо $\Delta = 0, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система має або безліч розв'язків.

**Метод Гаусса.**

Цей метод носить ще назву метода послідовного виключення невідомих. Метод полягає в тому, що система (1) за допомогою алгебраїчних перетворень приводиться до вигляду трикутної. Але більш зручно користуватися цим методом в табличній формі (таблиця 1)

| № рядка | Коефіцієнти при | | | Вільні члени | Сума | Контроль |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $b_1$ | $a_{11} + a_{12} + a_{13} + b_1 = S_1$ | |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $b_2$ | $a_{21} + a_{22} + a_{23} + b_2 = S_2$ | |
| 3 | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $b_3$ | $a_{31} + a_{32} + a_{33} + b_3 = S_3$ | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | – | $a_{42} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ | $a_{43} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$ | $b_4 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$ | $a_{42} + a_{43} + b_4 = S_4$ | $a_{11}S_2 - a_{21}S_1 = S_4$ |
| 5 | – | $a_{52} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$ | $a_{53} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$ | $b_5 = a_{11}b_3 - a_{31}b_1$ | $a_{52} + a_{53} + b_5 = S_5$ | $a_{11}S_3 - a_{31}S_1 = S_5$ |
| 6 | – | – | $a_{63} = a_{42}a_{53} - a_{52}a_{43}$ | $b_6 = a_{42}b_5 - a_{52}b_4$ | $a_{63} + b_6 = S_6$ | $a_{42}S_5 - a_{52}S_4 = S_6$ |

При розв'язуванні СЛР можливі випадки:

1. Якщо при приведенні системи (1) до трикутного вигляду, останнє (третє) рівняння буде мати вигляд$0 \cdot x_3 = 0$, то система (1) має безліч розв'язків. Позначимо $x_3 = c$ $(c \in R)$, з другого та першого рівнянь виразимо $x_2$ та$x_1$ через $c$.

2. Якщо останнє рівняння в системі (3) буде мати вигляд$0 \cdot x_3 = c, (c \in R/\{0\})$, то система несумісна.

## 2. Завдання для самостійного виконання

*Індивідуальне домашнє завдання*(номер варіанта відповідає номеру у журналі)Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса та Крамера:

| ВАРІАНТИ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ | 7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ | 16. $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ |
| 17. $\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ | 19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$ |
| 21. $\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$ | 22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ | 23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$ | 24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ |

## 3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

## 4. Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

**Завдання.**Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$методом Гаусса та Крамера.

Розв'язання:

**Метод Гаусса:** складаємо обчислювальну таблицю:

| Номер рядка | Коефіцієнти при $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | Вільні члени | Сума | Контроль |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 3 | 9 | $1+4+3+9=17$ | |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 8 | $2+3+1+8=14$ | |
| 3 | 1 | 1 | -2 | 3 | $1+1-2+3=3$ | |
| 4 | - | $1\cdot 3-2\cdot 4=-5$ | $1\cdot 1-2\cdot 3=-5$ | $1\cdot 8-2\cdot 9=-10$ | $-5-5-10=-20$ | $1\cdot 14-2\cdot 17=-20$ |
| 5 | - | $1\cdot 1-1\cdot 4=-3$ | $1\cdot(-2)-1\cdot 3=-5$ | $1\cdot 3-1\cdot 9=-6$ | $-3-5-6=-14$ | $1\cdot 3-1\cdot 17=-14$ |
| 6 | - | - | $-5\cdot(-5)-(-3)\cdot(-5)=10$ | $-5\cdot(-6)-(-3)\cdot(-10)=0$ | $10+0=10$ | $-5\cdot(-14)-(-3)\cdot(-20)=10$ |

Згідно рядків 1, 4, 6 записуємо систему трикутного вигляду: $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3=9, \\ -5x_2-5x_3=-10, \\ 10x_3=0. \end{cases}$.

З даної системи знаходимо невідомі

$$\begin{cases} x_1=9-4x_2-3x_3, \\ x_2=-\frac{1}{5}(-10+5x_3) \\ x_3=\frac{0}{10}. \end{cases},\Rightarrow \begin{cases} x_1=9-4\cdot 2-3\cdot 0, \\ x_2=-\frac{1}{5}(-10+5\cdot 0) \\ x_3=0. \end{cases},\Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=0. \end{cases}.$$

**Метод Крамера:**обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot 3(-2)+2\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 4-1\cdot 3\cdot 3-1\cdot 1\cdot 1-(-2)\cdot 4\cdot 2=-6+6+4-9-1+16=10\neq 0.$$

Отже система має розв’язок.

Обчислюємо допоміжні визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=9\cdot 3(-2)+8\cdot 1\cdot 3+3\cdot 1\cdot 4-3\cdot 3\cdot 3-1\cdot 1\cdot 9-(-2)\cdot 4\cdot 8=-54+24+12-27-9+64=10$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot 8(-2)+2\cdot 3\cdot 3+1\cdot 1\cdot 9-1\cdot 8\cdot 3-3\cdot 1\cdot 1-(-2)\cdot 9\cdot 2=-16+18+9-24-3+36=20$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot 3+2\cdot 1\cdot 9+1\cdot 8\cdot 4-1\cdot 3\cdot 9-1\cdot 8\cdot 1-3\cdot 4\cdot 2=9+18+32-27-8-24=0.$$

За формулами Крамера знаходимо невідомі:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{10}{10}=1,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{20}{10}=2,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{0}{10}=0.$$

**Тема : Розв'язування СЛР методом оберненої матриці.**

**План**

1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**
3. **Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.**
4. **Зразок оформлення ІДЗ.**

## 1.Теоретичні відомості

Обмежимось розглядом системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо позначення:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця системи, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця вільних членів, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця невідомих.

Знайдемо добуток матриць $A \cdot X$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись означенням рівності матриць, бачимо, що СЛР (1) є не що інше як рівність відповідних елементів матриць – стовпців $A \cdot X$ і $B$. Тому систему (1) можна записати у матричному вигляді.

$$A \cdot X = B \qquad (2)$$

Для розв'язання даного рівняння помножимо зліва на обернену матрицю $A^{-1}$, вважаючи, що $\Delta \neq 0$, отримаємо$A^{-1}AX = A^{-1}B$. Але $A^{-1}A = E$, а$EX = X$, тоді розв'язання матричного рівняння запишеться у вигляді:

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

**2. Завдання для самостійного виконання**

*Індивідуальне домашнє завдання*(номер варіанта відповідає номеру у журналі)Розв'язати систему лінійних рівнянь методом оберненої матриці:

| ВАРІАНТИ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$ |
| 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ | 7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ | 8. $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$ | 10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ | 16. $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ |
| 17. $\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ | 19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$ | 20. $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$ |

**3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи**

1. Опрацювати теоретичний матеріал.
2. Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

**4. Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання**

**Завдання.** Показати, що система має єдиний розв'язок та знайти його за методом оберненої матриці: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \\ 4x_1 + 7x_2 + 0x_3 = -13. \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

Розв'язання:

1) Запишемо систему у матричному вигляді $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2) Обчислимо визначник $\Delta$ матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot 5 + 4\cdot(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 0\cdot(-3) - (-1)\cdot 7\cdot 1 - (-2)\cdot 0\cdot 2 - 5\cdot(-3)\cdot 4 = 129.$$

Так як визначник системи$\Delta = 129 \neq 0$, то дана система має єдиний розв'язок і існує матриця обернена до даної.

4) Знайдемо обернену матрицю, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij}$:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 35;$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 13;$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -7;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4;$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 26.$

5) Отримані результати підставляємо у формулу (3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 35 & 13 & -7 \\ -20 & 11 & 4 \\ -1 & 7 & 26 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 35\cdot 13 + 13\cdot(-13) + (-7)\cdot 4 \\ -20\cdot 13 + 11\cdot(-13) + 4\cdot 4 \\ -1\cdot 13 + 7\cdot(-13) + 26\cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 258 \\ -387 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи єдиний, це сукупність чисел $(2; -3; 0)$.

**Тема : Графічне розв'язання систем лінійних нерівностей.**

**План**

**1. Теоретичні відомості.**

**2. Завдання для самостійного виконання.**

**3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.**

**4. Зразок оформлення ІДЗ.**

## 1.Теоретичні відомості

Для зображення множини розв'язків нерівності з двома невідомими на координатній площині використовують алгоритм.

**Алгоритм**

1. Замінюємо у нерівності $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 > b_1$знак нерівності на знак дорівнює $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Отримаємо граничну пряму, яку і побудуємо (пунктиром, якщо нерівність строга, суцільною лінією, якщо нерівність нестрога) на координатній площині. Пряма розіб'є площину на дві півплощини.

2. Вибираємо будь-яку з півплощин і розглядаємо в ній довільну точку. Убагатьох випадках, якщо це можливо вибираємо точку $O(0;0)$. Підставляють координати даної точки у нерівність і перевіряють виконання нерівності. Якщо у результаті перевірки отримуємо вірну числову нерівність, то робимо висновок, що нерівність виконується у всій області, якій належить вибрана точка. Якщо в результаті перевірки отримаємо невірну нерівність, то множиною розв'язків буде друга півплощина, якій вибрана точка не належить.

3. Якщо нерівність строга, то границі області (тобто гранична пряма) не включають в множину розв'язків, якщо нестрога – то включають.

## 2. Завдання для самостійного виконання

*Індивідуальне домашнє завдання*(номер варіанта відповідає номеру у журналі). Розв'язати систему лінійних нерівностей графічним способом:

1) $\begin{cases} x_1 \geq -2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ 2x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \geq 0 \\ x_1 - x_2 - 5 \geq 0 \\ x_1 \leq 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3 \leq 0 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 6 \\ 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ 4x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 - x_2 + 8 \geq 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 \geq \frac{1}{2} \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 6 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - 5x_2 \leq -5 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \end{cases}$

## 3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

Оформити роботу в зошиті для самостійних та практичних робіт.

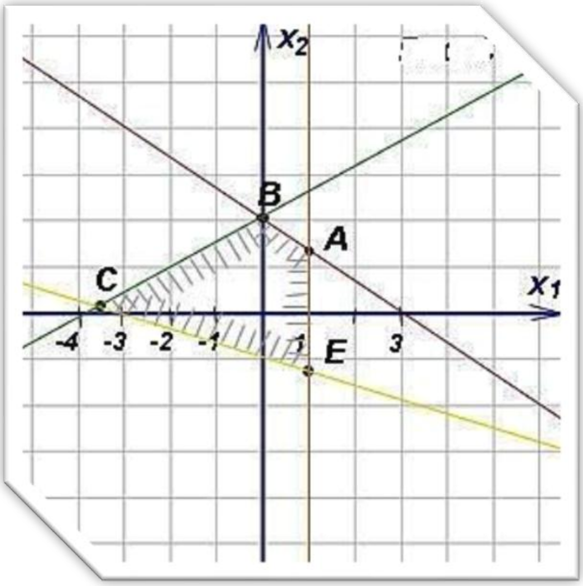
## 4. Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

**Завдання.** Розв'язати систему лінійних нерівностей графічним

способом: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$

Розв'язання.

Будуємо граничні прямі, які відповідають нерівностям системи. Робимо кроки, які зазначені в алгоритмі для кожної нерівності. Тепер визначаємо півплощину розв'язків для кожної нерівності.




Півплощини розв'язків відповідних нерівностей даної системи, заштриховані в середину. Перетини півплощин розв'язків зображується як показано на рисунку, у вигляді чотирикутника *ABCE. Отже розв'язком даної системи нерівностей є чотирикутник ABCE.*

**Тема : Диференціювання функцій.**

**План**

1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**

**1. Теоретичні відомості.**

**Означення:**Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її *похідною* і позначається одним із символів:

$$f^{/}(x_0)\ , y^{/}(x_0), \frac{dy}{dx}.$$

Отже, за означенням

$$f^{/}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

- якщо похідна функції $y = f(x)$ в точці $x_0$ існує, то функція називається *диференційованою в точці* $x_0$;
- якщо функція диференційована в кожній точці деякого проміжку *X*, то вона називається *диференційованою на проміжку X*;
- операція відшукання похідної називається *диференціюванням*.

**правила диференціювання**

**Теорема.** Якщо функції *u(x)* і *v(x)* мають похідні в точці *x*, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1. $(Cu)^{/} = C(u)^{/}$;
2. $(u \pm v)^{/} = u^{/} \pm v^{/}$;
3. $(u \cdot v)^{/} = u^{/} \cdot v + u \cdot v^{/}$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{u^{/} \cdot v - u \cdot v^{/}}{v^2}$.

**Таблиця похідних основних елементарних функцій**

$$C^{/} = 0 \qquad (\sin x)^{/} = \cos x$$

$$x^{/} = 1 \qquad (\cos x)^{/} = -\sin x$$

$$(x^n)^{/} = n \cdot x^{n-1} \qquad (\operatorname{tg} x)^{/} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\operatorname{ctg} x)^{/} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)^{/} = e^x \qquad (\arcsin x)^{/} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)^{/} = a^x \cdot \ln a \qquad (\arccos x)^{/} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\ln x)^{/} = \frac{1}{x} \qquad (\operatorname{arctg} x)^{/} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)^{/} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (\operatorname{arcctg} x)^{/} = -\frac{1}{1+x^2}$$

**диференціювання складених функцій**

Нехай функція $y = f(u)$ визначена в деякому околі точки $u$ і функція $u = \varphi(x)$ визначена в деякому околі точки *x*, таким чином визначена складена функція $y = f[\varphi(x)]$.

**Теорема.** Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u$ і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці *x*, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці *x*, причому

$$y_x^{/} = (f[\varphi(x)])^{/} = f^{/}(u) \cdot \varphi^{/}(x),$$

або скорочено

$$y_x^{/} = y_u^{/} \cdot u_x^{/}.$$

Це правило розповсюджується на ланцюжок з будь-якої кількості диференційованих функцій:*похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, з яких вона складається*.

**Зразки виконання завдань на обчислення похідних та застосування економічного змісту похідної**

**Приклад 1.** Знайти похідну функції $y = cos^5 3x$.

Розв'язання:

Приймаючи $y = u^5$, $u = cos3x$маємо:$y^/ = (u^5)^/ \cdot (cos3x)^/$;

$y^/ = 5u^4 \cdot \left((-sin3x) \cdot 3\right) = 5cos^4 3x \cdot (-3sin3x) = -15cos^4 3x \cdot sin3x$ .

**Приклад 2.** Знайти похідну функції:$y = \ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$.

Розв'язання:

Нехай$y = \ln u$, а$u = x^3 - 3x^2 + 4x$.

$y_x^/ = y_u^/ \cdot u_x^/ = \frac{1}{u}(3x^2 - 6x + 4) = \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}$.

**2. Завдання для самостійного виконання.**

Повторити та систематизувати теоретичний матеріал, скласти опорний конспект.

Підготуватися до аудиторної самостійної роботи

**Тема : Дослідження функції за допомогою похідної та побудова графіка.**

**План**

**1. Теоретичні відомості.**

**2. Завдання для самостійного виконання.**

**3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи.**

**4. Зразок оформлення роботи.**

## 1.Теоретичні відомості

**Загальна схема дослідження функції**

1) Знайти область визначення.

2) Перевірити функцію на парність або непарність.

3) Перевірити функцію на періодичність.

4) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5) Знайти критичні точки першого роду, визначити проміжки зростання і спадання функції, знайти точки локального екстремуму.

6) Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

7) Знайти асимптоти графіка функції.

8) За одержаними результатами побудувати ескіз графіка функції.

**2. Завдання для самостійного виконання**

*Індивідуальне домашнє завдання*(номер варіанта відповідає номеру у журналі). Дослідити функцію та побудувати її графік.

**1.**$y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 30$

**2.**$y = -x^3 - 9x^2 - 24x + 30$

**3.**$y = -x^3 + 3x^2 + 8$

**4.**$y = x^3 - 6x^2 + 9x$

**5.**$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 6$

**6.**$y = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 4$

**7.**$y = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 1$

**8.**$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 8$

**9.**$y = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 53$

**10.**$y = -x^3 + 9x^2 - 15x + 1$

**11.**$y = -2x^3 + 21x^2 + 36x - 53$

**12.**$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$

**13.**$y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

**14.**$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

**15.**$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 11$

**3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи**

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для практичних та самостійних робіт.

**4. Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання**

**Завдання.** Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ та побудувати її графік

Розв'язання:

1) функція визначена на всій числовій осі, тобто$D(y) = R$;

2) дана функція не є ні парною, ні непарною;

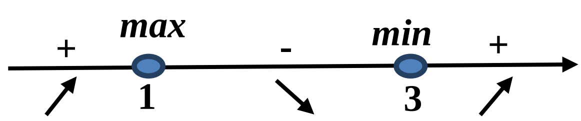
3)неперіодична;

4)$Oy$: $x = 0,\ y = -3$;точки перетину з віссю$Ox$ у даному випадку знайти складно;

5)$y^/ = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)^/ = 3x^2 - 12x + 9$;$3x^2 - 12x + 9 = 0$;

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

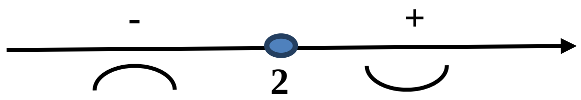
Відмічаємо отримані точки на числовій прямій і досліджуємо функцію на монотонність, а також точки екстремуму:



$y_{max} = y(1) = 1, y_{min} = y(3) = -3;$

6) $y^{//} = (3x^2 - 12x + 9)^/ = 6x - 12; 6x - 12 = 0, x = 2.$

Відмічаємо отримані точки на числовій прямій і досліджуємо функцію на випуклість (угнутість), а також точки перегину:




$(2; -1)$–точка перегину;

7) графік функції не має асимптот;

8) використовуючи отримані дані, будуємо графік(рис. 1).

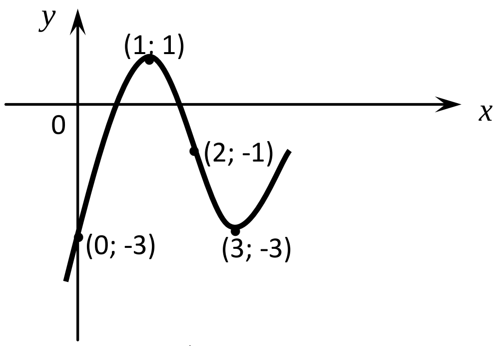



рис.1