Лекція 9

Тема: Поняття інтегральної суми. Визначений інтеграл. Формула Ньютона – Лейбніца. Властивості визначеного інтеграла.

Мета: Повторити і систематизувати відомості про визначений інтеграл.

План

1. Інтегральна сума. Її геометричний і фізичний зміст.
2. Поняття визначеного інтеграла й умови його існування.
3. Формула Ньютона – Лейбніца.
4. Властивості визначеного інтеграла.
5. Методи інтегрування визначеного інтеграла.

1. Інтегральна сума. Її геометричний і фізичний зміст

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n довільних (не обов'язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i = \overline{0, n}$ такими, що $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}\,;\, x_i]$ візьмемо по одній довільній (не обов'язково середній) точці і c_i, $i = \overline{1, n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму отриманих добутків:

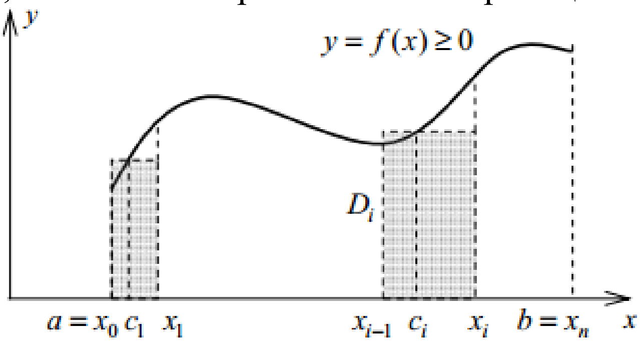
$$S_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + \cdots + f(c_i)\Delta x_i + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Цей вираз називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Зауваження: інтегральна сума $S_n(f)$, як це випливає з її побудови, не є функцією змінної n і не є функцією змінної x. Інтегральна сума залежить як від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу x_i, $i = \overline{0, n}$, так і від вибору точок c_i, $i = \overline{1, n}$
по одній на кожному частинному відрізку.

геометричний зміст

Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу віссю $0x$ і вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, називається криволінійною трапецією. Знайдемо її площу S.



Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника D_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. Інтегральна сума $S_n(f)$ чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції: $S \approx S_n(f)$.

фізичний зміст

Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v = v(t)$. Треба знайти довжину пройденого шляху S за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha; \beta]$ на n довільних частин точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta$. Розглянемо будь-який частинний проміжок $[t_{i-1}\,;\, t_i]$. Припустимо, що цей відрізок $[t_{i-1}\,;\, t_i]$ – настільки малий, що швидкість на ньому $v = v(t)$ змінюється мало, а тому її можна наближено вважати сталою: $v = v(c_i)$ $c_i \in [t_{i-1}\,;\, t_i]$. Тоді довжина шляху ΔS_i, який пройдено точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ наближено дорівнює добутку $v(c_i)\Delta t_i$: $\Delta \mathrm{Si} \approx v(c_i)\Delta t_i$. Інтегральна сума $S_n(v) = \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ є наближеним значенням пройденого шляху за весь проміжок часу $[\alpha;\beta]$: $S \approx S_n(v)$.

2. Поняття визначеного інтеграла й умови його існування

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a; b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}\,;\, x_i]$ $i = \overline{1, n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Означення: визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при не обмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (9.1)$$

де a і b – відповідно нижня і верхня межі інтегрування; $[a; b]$ – відрізок інтегрування.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a; b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1}\,;\, x_i]$ $i = \overline{1, n}$.

***Зауваження*:** не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім'я функцій (первісних), а визначений інтеграл – це число (значення границі).

геометричний зміст

Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (9.2)$$

фізичний зміст

Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v = v(t)$. Тоді визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ чисельно дорівнює пройденому шляху S за проміжок часу $[\alpha; \beta]$:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt. \tag{9.3}$$

умови існування інтегралів

Теорема (необхідна умова інтегрованості). Якщо функція інтегрована на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.

Зауваження. Умова обмеженості функції є необхідною, але не є достатньою для інтегровності функції.

Теорема (достатня умова інтегрованості). Функція, неперервна на відрізку, інтегрована на ньому.

3. Формула Ньютона – Лейбніца

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Теорема (Ньютона – Лейбница). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$ – *формула Ньютона – Лейбніца*

4. Властивості визначеного інтеграла

Спираючись на означення та формулу Ньютона – Лейбніца, що пов'язує визначений інтеграл з невизначеним, можна встановити основні властивості визначеного інтеграла.

Найпростіші властивості:

1. Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування (змінна інтегрування є "німою"):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0.$$

3. Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

властивість адитивності за проміжком:

4. Для будь-яких трьох чисел a, b і c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

властивості лінійності:

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \text{ де } A = const.$$

6. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо. Так, у разі трьох функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

властивості монотонності:

7. Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній $b \geq a$, то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо на відрізку $[a;b]$, де $a < b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Іншими словами, нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої.

9. Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню $b \geq a$:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

5. Методи інтегрування визначеного інтеграла

заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $x' = \varphi'(t)$ і монотонна на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді справедлива формула заміни змінної у визначеному інтегралі

Лекція 9

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) & \alpha=\varphi^{-1}(a) \\ dx=\varphi'(t)dt & \beta=\varphi^{-1}(b) \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (9.4)$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ – обернена функція.

***Зауваження* 1:** при заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x=\varphi(t)$ ці умови задовольняє.

***Зауваження* 2:** аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

***Зауваження* 3:** виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$.

Розв'язання:

$$I=\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{vmatrix} x+1=t^2 & x=t^2-1 & dx=2tdt \\ t=\sqrt{x+1} & t_1=\sqrt{3+1}=2 & t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_2^3 \frac{t^2-1-3}{t}2tdt = 2\int_2^3 (t^2-4)dt = 2\int_2^3 t^2dt - 8\int_2^3 dt = \frac{2}{3}t^2|_2^3 - 8t|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}(3^3-2^3) - 8(3-2) = \frac{14}{3}.$$

***Зауваження* 4:** при обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і скористатися формулою Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int_{-2}^{-1} \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx$.

Розв'язання:

$$I = \begin{vmatrix} t=x^4+5x^2+6 & dt=2(2x^3+5x)dx \\ dt=(4x^3+10x)dx & \frac{dt}{2}=(2x^3+5x)dx \end{vmatrix} = \int\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t|+C =$$

$$= \frac{1}{2}ln|x^4+5x^2+6|\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}ln|1+5+6| - \frac{1}{2}ln|16+20+6| = \frac{1}{2}ln\frac{12}{42} = \frac{1}{2}ln\frac{2}{7}.$$

інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$

Оскільки $\int(uv)'dx = uv + C$, тому $\int_a^b (uv)'dx = uv|_a^b$.

Отже $uv|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$. Звідси остаточно маємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu, \qquad (9.5)$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Лекція 9

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int_1^2 xe^x dx$.

Розв'язання:

$$I = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (2e^2 - e) - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - $$
$$-e^2 + e = e^2.$$

питання для самоконтролю

1. Що таке інтегральна сума?
2. У чому полягає геометричний зміст інтегральної суми?
3. У чому полягає фізичний зміст інтегральної суми?
4. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?
5. У чому полягає фізичний зміст визначеного інтегралу?
6. У чому різниця між невизначеним та визначеним інтегралом?
7. За допомогою якої формули обчислюють визначений інтеграл?

література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина І. М.: Наука, 1987.

2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина ІІ. М.: Наука, 1987.

3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.

6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.