Лекція 10

Тема: Наближені методи обчислення визначеного інтеграла.

Мета: ознайомити з новими методами інтегрування визначеного інтегралу, у яких підінтегральна функція не може бути виражена через елементарні функції.

План

1. Метод прямокутників.
2. Метод трапецій.
3. Формула параболічних трапецій (формула Сімпсона).

1. Метод прямокутників

Методи наближеного інтегрування дозволяють знаходити наближені значення визначеного інтегралу від будь-якої неперервної функції з достатньою точністю. Дані чисельні методи базуються на наступному: розглядаючи інтеграл як площу криволінійної трапеції, отримаємо її наближені значення, тобто наближене значення інтегралу. Існує велика кількість функцій, інтеграли від яких не можуть бути виражені через елементарні функції, тоді для знаходження інтегралів від таких функцій використовують слідуючи методи чисельного інтегрування:

1) метод прямокутників та метод трапецій;
2) метод параболічних трапецій, що називається формулою Сімпсона.

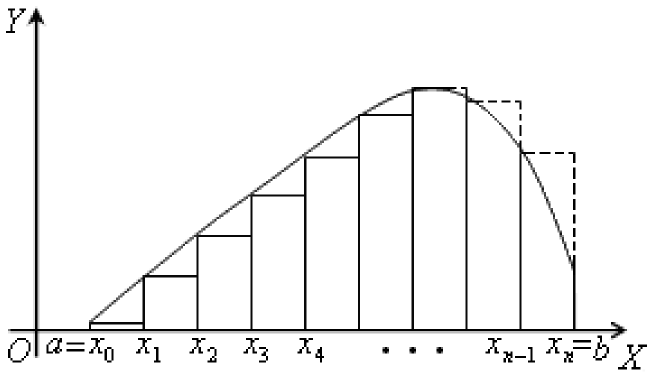
метод прямокутника

Розділимо інтервал інтегрування $[a;b]$ на n рівних частин (частинні інтервали) та замінимо дану трапецію на ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, що спираються на частині інтервали, причому висоти цих прямокутників рівні значенню функції в початкових або кінцевих точках частинних інтервалів $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Значення площі цієї фігури і буде давати наближене значення шуканого інтегралу: $\int_a^b f(x)dx$.

Результат буде більш точним, чим більше взято число частинних інтервалів.

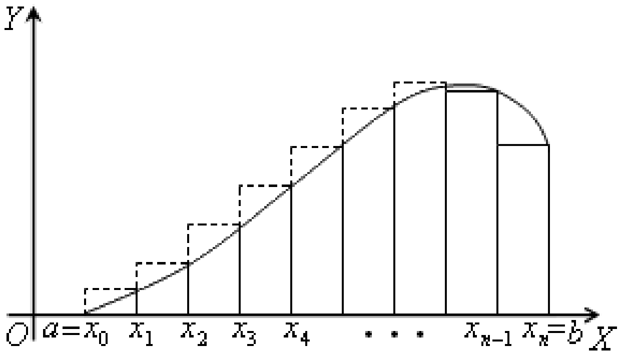
Якщо позначити довжини частинних інтервалів як $\frac{b-a}{n} = h$ (крок розбиття) та порахувати всі значення функції y_i(де $i = 0,1,2,3, \dots, n-1$), то отримаємо такі формули:

- ✓ *формула лівих прямокутників*



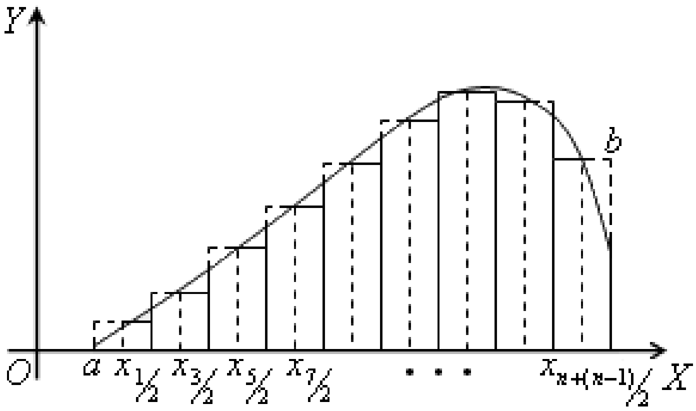
$$I=\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)=h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})$$

- ✓ *формула правих прямокутників*



$$I=\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i-x_{i-1})=h(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$

- ✓ *формула серединних прямокутників*



$$I=\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)=h(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\ldots+y_{\frac{2n-1}{2}}$$

або

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx\approx h\left(\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\ldots+\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right)$$

Метод серединних прямокутників є більш точним в порівнянні з методом правих та лівих прямокутників, тому він частіше використовується.

Але на практиці цими формулами користуються рідко, так як взявши замість прямокутників звичайні трапеції, ми практично при тому ж об’ємі роботи, отримаємо більш точний результат.

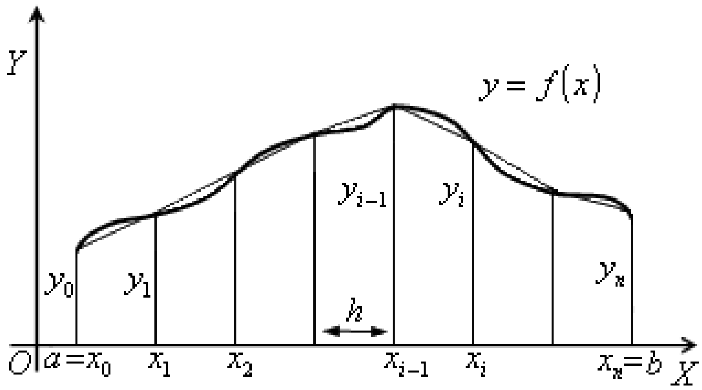
2. Метод трапецій

Формулу трапецій отримують аналогічно формулі прямокутників: на кожному частинному відрізку криволінійна трапеція замінюється звичайною.

Лекція 10

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a; b]$ на n рівних частин довжиною $\frac{b-a}{n} = h$. В результаті отримаємо точки $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n = b$



Нехай $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – відповідні їм ординати функції. Замінивши криву $f(x)$ ламаною лінією, ланки якої з'єднують кінці ординат. Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ звичайних трапецій з основами y_i та y_{i+1} і висотою $h = \frac{b-a}{n}$, тобто

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Дана формула називається *формулою трапецій*.

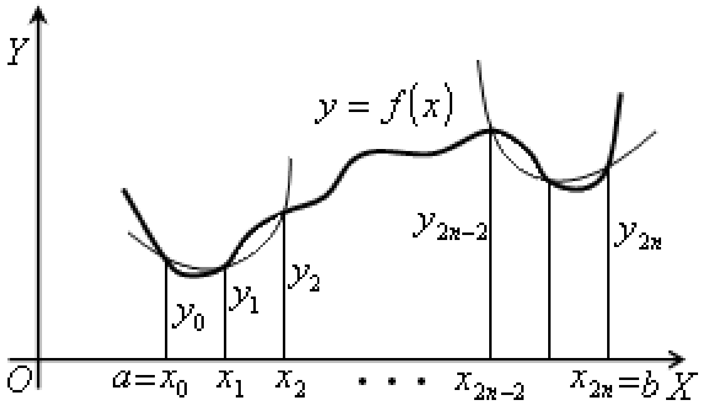
3. Формула параболічних трапецій (формула Сімпсона)

Серед формул наближеного обчислення інтегралів найвдалішою формулою буде та, яка отримується, якщо через трійки сусідніх точок на графіку функції, що виникають в результаті розбиття відрізка $[a; b]$, проводити параболи з вертикальною віссю, обчислюючи відповідні коефіцієнти a_i, b_i, c_i в рівняннях парабол $y = a_i x^2 + +b_i x + c_i$.

Відповідна формула носить назву формули *параболічних трапецій* або *Сімпсона*. Цінність її не тільки в точності, але і в зручності оцінки похибки наближеного обчислення.

Якщо замінити графік функції $y = f(x)$ на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, які отримані після розбиття відрізка інтегрування $[a; b]$ на рівних частин $2n$ не відрізками прямих, як в методах прямокутників та трапецій, а дугами парабол, то отримаємо більш точну формулу наближеного обчислення визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$. Крок розбиття в цьому випадку обчислюється за формулою $h = \frac{b-a}{2n}$. В точках розбиття знаходимо значення підінтегральної функції y_i(де $i = 0,1, \ldots ,2n$).

Лекція 10



Замінюючи кожну пару сусідніх елементарних криволінійних трапецій з основами h однією елементарною параболічною трапецією з основою $2h$. Тоді, наприклад, на частинному відрізку $[x_0; x_2]$ парабола проходить через три точки $[x_0; y_0]$, $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$ і так далі.

Розрахункова *формула парабол* (або *Сімпсона*) для цього метода має вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} y_0 + y_{2n} + 2\sum_{i=1}^{n} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}$$

питання для самоконтролю

1. Що таке інтегральна сума?
2. У чому полягає метод прямокутників?
3. У чому полягає метод трапецій?
4. У чому полягає метод параболічних трапецій?

література

1. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина І. М.: Наука, 1987.

2. Яковлев Г.Н., Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Алгебра і початки аналізу, частина ІІ. М.: Наука, 1987.

3. Г.Н. Яковлєв. Геометрія . М.: Наука, 1987.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.

5. Богомолов М.Б. Практичні заняття з математики. Київ: Вища школа, 1983. Н.М.

6. І.І. Валуце, Г.Д. Ділігул. Математика для технікумів. М. Высшая школа, 1983.