Методи інтегрування визначеного інтеграла

Мета: Виробити практичні навички знаходження визначених інтегралів безпосередньо, з використанням методу підстановки та шляхом інтегрування частинами.

Тривалість заняття: 2 години.

Методичні вказівки з виконання і оформлення: при виконанні практичних завдань скористайтеся:

- формулою Ньютона-Лейбніца,
- властивостями визначеного інтегралу
- методами інтегрування (безпосередньо, заміною, за частинами);
- при виконанні завдань прикладного характеру застосувати фізичний та геометричний зміст визначеного інтеграла.

теоретичні питання для обговорення

1. Формула Ньютона – Лейбніца.
2. Властивості визначеного інтеграла.
3. Методи інтегрування визначеного інтегралу.
4. Алгоритм методу заміни змінної та методу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
5. Геометричний та фізичний зміст визначеного інтегралу.

Теоретична частина

Означення. Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при не обмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_{i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

де a і b – відповідно нижня і верхня межі інтегрування; $[a;b]$ – відрізок інтегрування.

Теорема (Ньютона – Лейбниця). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції $y = f\,(x)$ на відрізку $[a;b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ – *формула Ньютона – Лейбніца*

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід’ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

найпростіші властивості:

1. Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування (змінна інтегрування є "німою"):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

властивість адитивності за проміжком:

4. Для будь-яких трьох чисел a, b і c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

властивості лінійності:

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx\,, \text{де } A = const.$$

6. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо. Так, у разі трьох функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

заміна змінної у визначеному інтегралі

$\int_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) & \alpha = \varphi^{-1}(a) \\ dx = \varphi^{/}(t)dt & \beta = \varphi^{-1}(b) \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi^{/}(t)dt$, де $t = \varphi^{-1}(x)$ – обернена функція.

інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Зразки виконання завдань на застосування визначеного інтеграла

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$ методом заміни змінної.

Розв'язання:

$I = \int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{vmatrix} x+1 = t^2 & x = t^2 - 1 & dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x+1} & t_1 = \sqrt{3+1} = 2 & t_2 = \sqrt{8+1} = 3 \end{vmatrix} =$

$= \int_2^3 \frac{t^2-1-3}{t}2tdt = 2\int_2^3 (t^2-4)dt = 2\int_2^3 t^2dt - 8\int_2^3 dt = \frac{2}{3}t^2|_2^3 - 8t|_2^3 =$

$= \frac{2}{3}(3^3 - 2^3) - 8(3-2) = \frac{14}{3}.$

Зауваження: при обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і скористатися формулою Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int_{-2}^{-1}\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx$ методом заміни змінної.

Розв'язання:

$$I=\begin{vmatrix} t=x^4+5x^2+6 & dt=2(2x^3+5x)dx \\ dt=(4x^3+10x)dx & \frac{dt}{2}=(2x^3+5x)dx \end{vmatrix}=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}ln|t|+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln|x^4+5x^2+6|\Big|_{-2}^{-1}=\frac{1}{2}ln|1+5+6|-\frac{1}{2}ln|16+20+6|=\frac{1}{2}ln\frac{12}{42}=\frac{1}{2}ln\frac{2}{7}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_1^2 xe^x dx$ інтегруванням частинами.

Розв'язання:

$$I=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{vmatrix}=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=(2e^2-e)-e^x\Big|_1^2=2e^2-e-$$

$$-e^2+e=e^2.$$

Практична частина

1. Використовуючи властивості визначеного інтеграла та таблицю інтегралів знайти інтеграли:

1. $\int_1^5\frac{7dx}{x}$; 2. $\int_0^4\left(1+2e^{\frac{x}{4}}\right)\mathrm{d}x$; 3. $\int_{-3}^1(2x^2+3x-1)\mathrm{d}x$; 4. $\int_1^2\frac{3x^4+x^3+2x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x$.

2. Інтегрування заміною змінної	3. Інтегрування частинами	
1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{sinxdx}{cos^2x+1}$;	1. $\int_0^1(4-3x)e^{-2x}dx$;	6. $\int_1^e(x^2+1)\ln x dx$;
2. $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;	2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\arccos 2x dx$;	7. $\int_0^1 x^3e^{-x^2}$;
3. $\int_e^{e^2}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$;	3. $\int_1^2\ln(3x+2)\,dx$;	8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$;
4. $\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$;	4. $\int_0^1 x\cdot 2^x dx$;	9. $\int_1^e x\ln x\,dx$;
5. $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$;	5. $\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$;	10. $\int_0^3(x+1)e^x dx$.