Застосування визначеного інтегралу до обчислення площ плоских фігур.

Мета: виробити практичні навички застосування визначеного інтегралу до обчислення площ плоских фігур.

Тривалість заняття: 2 години.

Методичні вказівки з виконання і оформлення: при виконанні завдань на знаходження площі фігур скористайтеся геометричним змістом визначеного інтегралу. Площу фігури, обмеженої заданими лініями, можна знайти, виконавши послідовно такі дії:

- ✓ побудувати лінії, що обмежують плоску фігуру;
- ✓ знайти точки перетину ліній;
- ✓ вказати інтеграл для знаходження площі (правильно вибравши підінтегральну функцію та межі інтегрування).

теоретичні питання для обговорення

1. Геометричний зміст визначеного інтегралу. Обчислення площі криволінійної трапеції.

2. Обчислення площі фігури для випадків, коли $\boldsymbol{f(x) > 0}$.

2. Обчислення площі фігури для випадків, коли $\boldsymbol{f(x) < 0}$.

3. Обчислення площі фігури, обмеженої двома функціями.

Теоретична частина

Геометричний зміст. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції: $S = \int_a^b f(x)dx$.

обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1).

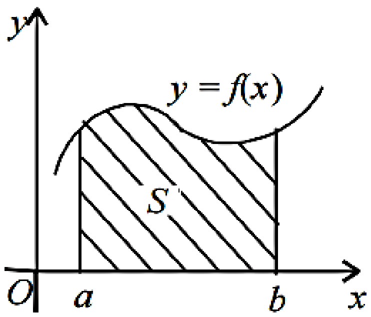


Рис. 1

а) Функція $f(x)$ – неперервна та $f(x) \geq 0$.

Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

б) Функція $f(x)$ – неперервна та $f(x) \leq 0$ (рис. 2)

$$S=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (2)$$

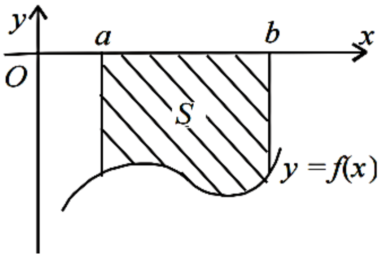


Рис. 2

II. Фігура обмежена лініями y=$f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні та $f(x)\geq g(x)$ для $x\in[a;b]$ (рис. 3, рис. 4, рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA2B1b та aA2B1b

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx \qquad (3)$$

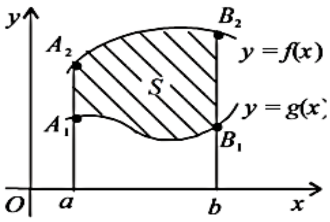


Рис. 3

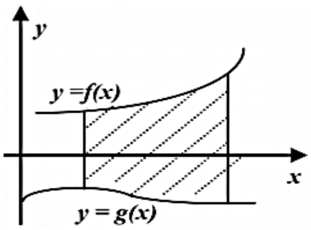


Рис. 4

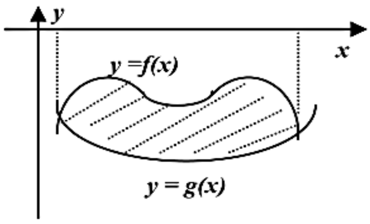
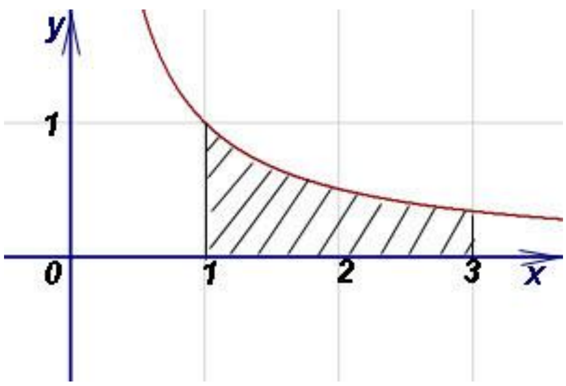


Рис. 5

Розв'язування завдань на застосування інтегралів

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмежену графіками функції $y=\frac{1}{x}$, віссю абсцис ($0x$) та прямими $x=1$, $x=3$.

Розв'язання:

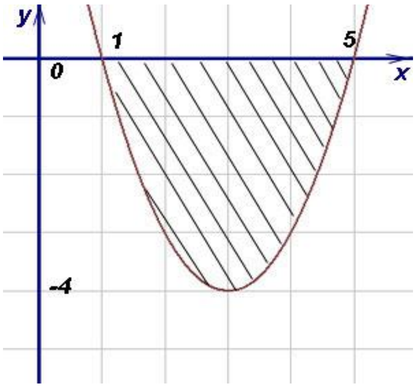


Так як $y=\frac{1}{x}>0$ на відрізку $[1;3]$, то площа криволінійної трапеції знаходимо за формулою (1):

$$S=\int_1^3\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3.$$

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y=x^2-6x+5$ та віссю абсцис ($0x$).

Розв'язання:



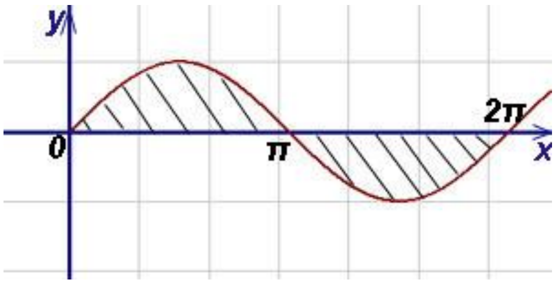
Дана фігура розташована нижче осі абсцис. Тому для обчислення її площі скористаємось формулою (2). Границями інтегрування є точки перетину параболи з віссю Ox: $x_1 = 1$ та $x_2 = 5$. Отже,

$$S = -\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Bigg|_1^5 =$$

$$= -\frac{125}{3} + 75 - 25 - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = \frac{32}{3} \text{ (кв.од.)}$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, розташовану між віссю абсцис (Ox) та синусоїдою.

Розв’язання:



Площу даної фігури зможемо знайти за формулою (1) та (2):

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

Знайдемо окремо кожний доданок:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Bigg|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

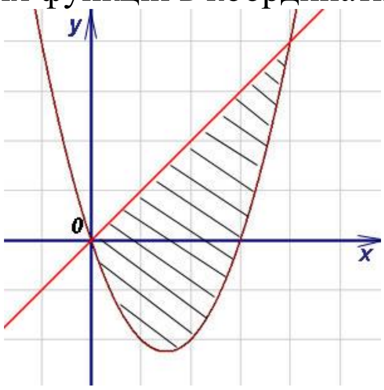
$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Bigg|_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos\pi) = -1 - 1 = -2$$

Отже, $S = 2 - (-2) = 4$ (кв.од).

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = x^2 - 3x$ та прямою $y = x$.

Розв’язання:

1) зобразимо графіки поданих функцій в координатній площині;



2) знайдемо границі інтегрування, розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = x. \end{cases}$

$x^2 - 3x = x$; $x^2 - 4x = 0$; $x(x-4) = 0$; $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4; \end{cases}$

3) за формулою (3) знаходимо площу:

$$S = \int_0^4 \left(x - (x^2 - 3x)\right)dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв.од.)}$$

Практична частина

Обчисліть площу фігури, обмеженої даними лініями:

1. $y = (x+2)^2$, $y = 4 - x$;	2. $xy = 5$, $x + y = 6$;	3. $y = x^2 - 2x$, $y = 2 - x$;
4. $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 7$;	5. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$;	6. $y = -x^2 + 9$, $y = 2x + 1$;
7. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;	8. $y = x^2$, $y = 2 - x$;	9. $y = x^2$, $y + x + 2 = 0$;
10. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$;	11. $y = -x^2$, $y = 5x^2 - 6$;	12. $y = x^2$, $y = x + 2$.