Тема 16

Наближені методи обчислення невизначеного інтеграла.

План

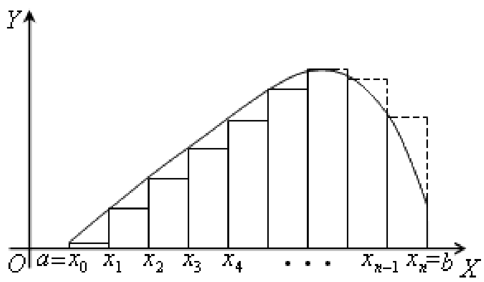
1. **Теоретичні відомості.**
2. **Завдання для самостійного виконання.**
3. **Вказівки до виконання завдання.**
4. **Зразок оформлення ІДЗ.**

Теоретичні відомості

метод прямокутника

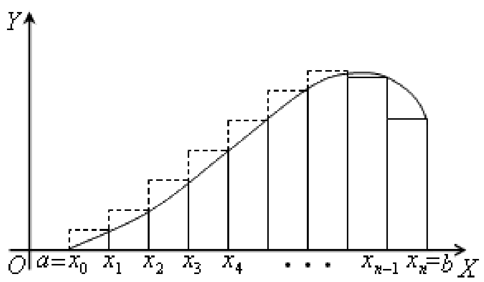
Розділимо інтервал інтегрування $[a;b]$ на n рівних частин (частинні інтервали) та замінимо дану трапецію на ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, що спираються на частині інтервали, причому висоти цих прямокутників рівні значенню функції в початкових або кінцевих точках частинних інтервалів $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Значення площі цієї фігури і буде давати наближене значення шуканого інтегралу: $\int_a^b f(x)dx$. Результат буде більш точним, чим більше взято число частинних інтервалів. Якщо позначити довжини частинних інтервалів як $\frac{b-a}{n} = h$ (крок розбиття) та порахувати всі значення функції y_i(де $i = 0,1,2,3,\dots,n-1$), то отримаємо такі формули:

- ✓ **формула лівих прямокутників**



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$

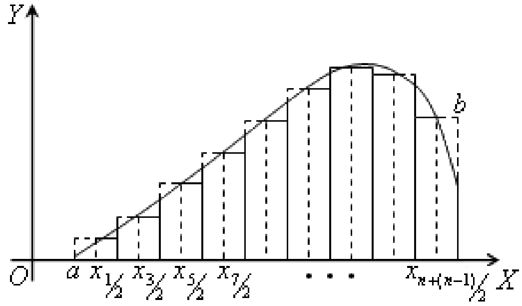
- ✓ **формула правих прямокутників**



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

- ✓ **формула серединних прямокутників**

Тема 16



$$I=\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)=h(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\ldots+y_{\frac{2n-1}{2}}$$

або

$$I=\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\left(x_1+\frac{h}{2}\right)+\ldots+\left(x_{n-1}+\frac{h}{2}\right)\right)$$

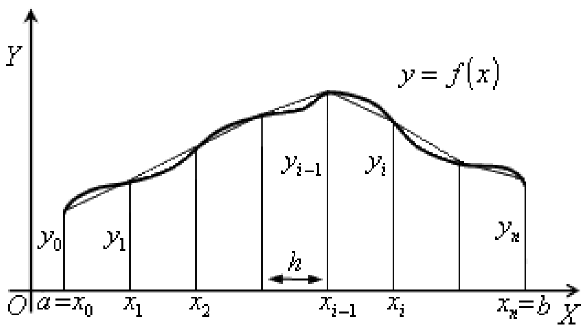
Метод серединних прямокутників є більш точним в порівнянні з методом правих та лівих прямокутників, тому він частіше використовується.

Але на практиці цими формулами користуються рідко, так як взявши замість прямокутників звичайні трапеції, ми практично при тому ж об'ємі роботи, отримаємо більш точний результат.

метод трапецій

Формулу трапецій отримують аналогічно формулі прямокутників: на кожному частинному відрізку криволінійна трапеція замінюється звичайною.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a;b]$ на n рівних частин довжиною $\frac{b-a}{n}=h$. В результаті отримаємо точки $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$



Нехай $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – відповідні їм ординати функції. Замінивши криву $f(x)$ ламаною лінією, ланки якої з'єднують кінці ординат. Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ звичайних трапецій з основами y_i та y_{i+1} і висотою $h=\frac{b-a}{n}$, тобто $I=\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$.

Дана формула називається формулою трапецій.

2. Завдання для самостійного виконання

Індивідуальне домашнє завдання (номер варіанта відповідає номеру у журналі)

Обчислити інтеграл, знайти його наближене значення за допомогою формули серединного прямокутника та формули трапеції ($n=5$). Обчислити похибку наближення.

1.	$\int_1^6 \sqrt{2x-3}\,dx$	**6.**	$\int_1^2 x(1-x^2)^4\,dx$	**11.**	$\int_0^5 (2x-1)^5\,dx$
2.	$\int_0^5 \frac{x}{1+x^2}dx$	**7.**	$\int_1^2 (2x-4)^7\,dx$	**12.**	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$

Тема 16

3.	$\int_0^3 \sqrt{5x+1}\,dx$	**8.**	$\int_1^6 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$	**13.**	$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$
4.	$\int_1^5 \frac{x^2}{1-x^3}dx$	**9.**	$\int_0^5 \frac{x}{1-3x^2}dx$	**14.**	$\int_1^4 \sqrt{8+x}\,dx$
5.	$\int_1^3 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$	**10.**	$\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^3}dx$	**15.**	$\int_1^7 \frac{x}{1-2x^2}dx$

3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи

1. Опрацювати теоретичний матеріал теми.
2. Виконати індивідуальне домашнє завдання в зошиті для самостійних робіт.

4. Зразок оформлення індивідуального домашнього завдання

Завдання. Обчислити інтеграл $\int_1^2 x^2(4-2x^3)\,dx$, знайти його наближене значення за допомогою формули серединного прямокутника та формули трапеції ($n=5$). Обчислити похибку наближення для методу прямокутників.

Розв'язання:

1) обчислимо інтеграл в аналітичний спосіб:

$$\int_1^2 x^2(4-2x^3)\,dx = \left| \begin{gathered} 4-2x^3=t \\ -6x^2dx = dt \Leftrightarrow x^2dx = -\frac{dt}{6} \\ t_1 = 4-2\cdot 1^3 = 2 \\ t_1 = 4-2\cdot 2^3 = -12 \end{gathered} \right| = \int_2^{-12} -\frac{1}{6}tdt = \left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_2^{-12} = -\frac{140}{12} \approx -11{,}67$$

2) Знайдемо h: $h = \frac{2-1}{5} = 0{,}2$. Всі обчислення оформлюємо в таблицю

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$x_i + \frac{h}{2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	
y_i	1,6189	-0,6659	-6,1875	-16,8371	-35,0819	

3) $I \approx 0{,}2(1{,}6189 - 0{,}6659 - 6{,}1875 - 16{,}8371 - 35{,}0819) = 0{,}2(-57{,}1535) = -11{,}4307 \approx -11.43.$

4) Знаходимо похибку: $\delta = \frac{|x-a|}{|a|}\cdot 100\% = \frac{|-11{,}67-(-11{,}43)|}{|-11{,}43|}\cdot 100\% = 2{,}1\%.$

5) обчислимо інтеграл за формулою трапецій: $h = \frac{2-1}{5} = 0{,}2$. Складемо обчислювальну таблицю.

i	0	1	2	3	4	5

Тема 16

x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	2	0,7834	-2,9165	-10,7315	-24,8314	-48

$$I = \int_1^2 x^2(4 - 2x^3)\,dx \approx 0{,}2\left(\frac{2-48}{2} + 0{,}7834 - 2{,}9165 - 10{,}7315 - 24{,}8314\right) \approx -12{,}14.$$